Luento 2
Todennäköisyyslaskennan perusteet, bayesiläinen analyysi

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Boolen algebra

- Muuttujat A,B, ... voivat olla *joukkoja*, *tapahtumia* tai *lauseita*
- Kullakin voi olla kaksi tilaa, joita yleensä merkitään 1 ja 0
- φ(A) = 1 tarkoittaa "kuuluu joukkoon A", "A ei ole toimintakunnossa" tai "Lause A tosi"
- φ(A) = 0 tarkoittaa "ei kuulu joukkoon A", "A on toimintakunnossa" tai "Lause A epätosi"
- Perusoperaatiot:

	Joukko	Lause	Tapahtuma	
Unioni	$A \cup B$	A tai B	$A + B$	Looginen summa
Leikkaus	$A \cap B$	A ja B	$A \cdot B$	Looginen tulo
Negaatio	$\neg A$	ei A	$\bar{A}$	Komplementti

- Luotettavuusteoriassa käytetään yleensä merkintöjä +, ·, –

Boolen algebra

- Ω = täydellinen joukko, varma tapahtuma tai aina tosi lause, joka saa arvon 1 aina (riippumatta A:n ja B:n “arvosta”)

- ϕ = tyhjä joukko, aina epätosi, mahdoton tapahtuma, joka saa “arvon” 0 aina

- $\varphi(\Omega) = 1$, $\varphi(\phi) = 0$

Boolen algebran lisämääritelmiä

- $B - A = \bar{A} \cdot B$

- A ja B ovat *toisensa poissulkevia*, joss $A \cdot B = \phi$

  - esim. A ja $\bar{A}$ ovat toisensa poissulkevia

Boolen algebran laskentalait

- $A + \bar{A} = \Omega$
- $A \cdot \bar{A} = \phi$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + \phi = A$
- $\Omega \cdot A = A$
- $\phi \cdot A = \phi$

Vaihdantalait

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + B = B + A$

Liitäntälait

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$

Osittelulait

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Supistuslait

- $A \cdot A = A$
- $A + A = A$

Absorptiolait

- $A + AB = A$
- $A \cdot (A + B) = A$

de Morganin säännöt

- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Summan esittäminen toisensa poissulkevan termin avulla

- $A + B = A + \bar{A} \cdot B$
- Hyödyllinen luotettavuustekniikan sovelluksissa
- A ja $\bar{A} \cdot B$ ovat toisensa poissulkevia

Todennäköisyysteoria

- Todennäköisyys on joukon, tapahtuman tai lauseen totuuden mitta
- P(A) = Todennäköisyys sille, että tapahtuma kuuluu joukkoon A, eli että $\varphi(A) = 1$

- Frekvenssitulkinta on suhteellinen osuus suuressa määrässä tilanteita, joissa mahdollisuusjoukko toistuu antaen tapahtuman A (lause A toteutuu)

  $$P(A) = \lim_{N \to \infty} N(A)/N$$

- Subjektiivinen tulkinta: P(A) on mitta sille kuinka vahvasti uskotaan tapahtuman A toteutuvan

Kolmogorovin aksioomat

- $0 \leq P(A)$

- $P(\Omega) = 1$

- Kaikille toisensa poissulkeville tapahtumille A ja B ($A \cap B = \phi$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ehdollinen todennäköisyys

P(A|C) = A:n ehdollinen todennäköisyys, ehdolla C
= tapahtumien A osuus niiden tapahtumien joukossa joissa C tapahtuu
= niiden tapahtumien osuus, joissa tapahtuu sekä A että C jaettuna niiden tapahtumien osuudella, joissa C tapahtuu

$P(A|C) = P(A \cdot C) / P(C)$, vastaavasti $P(C|A) = P(A \cdot C) / P(A)$

$P(A \cdot C) = P(C) \cdot P(A|C) = P(A) \cdot P(C|A)$

- Usein C edustaa jotakin syysuuretta ja A havaintosuuretta ja kiinnostaa tietää millä todennäköisyydellä syy C on aiheuttanut havainnon A

Bayesin kaava

- $P(C|A) = P(A|C) \cdot P(C) \,/\, P(A)$
- sovelletaan myöhemmin luotettavuusparametrien estimoinnissa

Tilastollinen riippumattomuus

Määritelmä

- B on riippumaton (tilastollisesti riippumaton) A:sta, jos $P(B|A) = P(B)$

Seuraus

- Jos B on riippumaton A:sta niin A on riippumaton B:stä
- Keskenään riippumattomille A ja B siis on

  $$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$
- Ei ole sama asia kuin toisensa poissulkevuus!

Satunnaismuuttuja ja todennäköisyysjakauma

- Satunnaismuuttuja X on reaaliarvoinen
- Sen realisaatio x voi saada arvoja joukossa R eli $\Omega = \{-\infty, \infty\}$
- Satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma

  $$F(x) = P(X \leq x) \Rightarrow P(X > x) = 1 - F(x)$$
- Ollakseen todennäköisyysjakauma F(x):lle pätee
  - $F(x) \geq 0$
  - $F(\infty) = 1$
  - F(x) on monotonisesti kasvava: $x > y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$

Jatkuva satunnaismuuttuja

- Satunnaismuuttuja X on jatkuva, jos F(x) on kaikkialla jatkuva

- X:n todennäköisyystiheys on
  - $f(x) = dF(x) / dx$

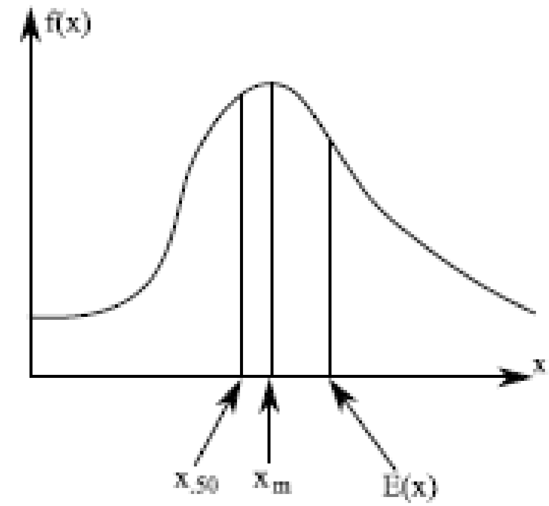
Diskreetti satunnaismuuttuja

- Satunnaismuuttuja X on diskreetti, jos se voi saada vain erillisiä arvoja tai numeroituvan määrän $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- Tällöin F(x) on porrasfunktio, joka kasvaa epäjatkuvasti pisteissä x_i ja on vakio pisteiden välillä
- Todennäköisyysjakauma esitetään pistetodennäköisyysfunktion $p_i = P(X = x_i)$ avulla
  - $0 \leq p_i \leq 1$
  - $F(x) = \sum_{xi \leq x} p_i$
  - $\sum_i p_i = 1$

Jakauman keskikohdan mittoja

Odotusarvo (keskiarvo) $m_1 = E(X)$

- $E(X) = \int x\, f(x)\, dx$ tai
- $E(X) = \sum_i p_i x_i$



Mediaani x_{50}

- $F(x_{50}) = 0{,}5$

Moodi

- todennäköisin arvo, tiheysfunktion maksimikohta

Jakauman leveyden mittoja

Fraktiili (persentiili), esim. α-fraktiili

- $F(x_\alpha) = \alpha$
- tyypillisesti kiinnostavat x_{05} ja x_{95}

Varianssi V(x)

- $V(x) = E[(x - m_1)^2]$
- Keskihajonta on varianssin neliöjuuri

Epävarmuuskerroin EF (Error Factor)

- lognormaalijakaumassa $EF = x_{95}/x_{50} = x_{50}/x_{05}$
- muutoin yleensä $x_{95}/x_{50} \neq x_{50}/x_{05}$, jolloin $EF = x_{95}/x_{50}$ tai $EF = x_{50}/x_{05}$ tai $EF = \sqrt{x_{95}x_{05}}$

Yhteisjakauma

- $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$

Reunajakauma

- $f_X(x) = \int f_{XY}(x, y)\, dy$

Ehdollinen jakauma

- $f(x|y) = f_{XY}(x, y) / fy(y)$

Jos X ja Y ovat tilastollisesti riippumattomia

$f_{XY}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

Satunnaismuuttujien summan Z = X + Y jakauma

- Tunnetaan $f_x(x)$ ja $f_y(y)$
- Mikä on $f_z(z)$?

- Käsitellään erityistapaus, että x ja y toisistaan riippumattomia
- Tällöin $f_z(z)$ voidaan lasketaan konvoluutiointegraalina

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_x(z-y)\, f_y(y)dy$$

- Luotettavuustekniikassa kyseistä kaavaa tarvitaan esim. kahden peräkkäisen vikavälin tai vikaantumisajan ja korjausajan summan jakauman laskemiseksi

Esimerkki diskreetistä jakaumasta Bernoullin jakauma

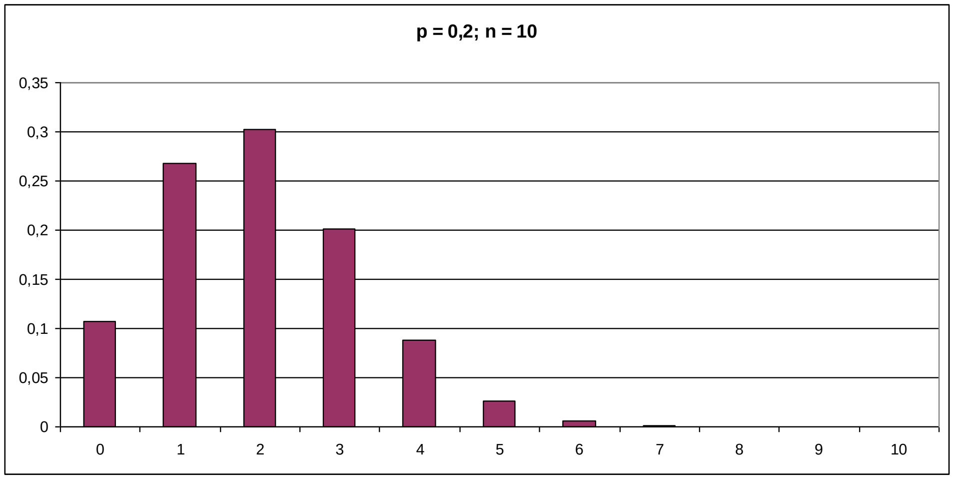
- X:llä on kaksi mahdollista arvoa {0,1}

- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = q = 1 – p$

Tunnusluvut:
- $EX = p$
- $Var(X) = p(1 – p)$

Esimerkki diskreetistä jakaumasta binomijakauma

- n:n toisistaan riippumattoman Bernoulli-jakautuneen muuttujan summa
- $Y = X_1 + \ldots + X_n$
- $p(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \ldots, n$



Tunnusluvut:

- EY = np
- Var(Y) = np(1 – p)

Multinominaalijakauma

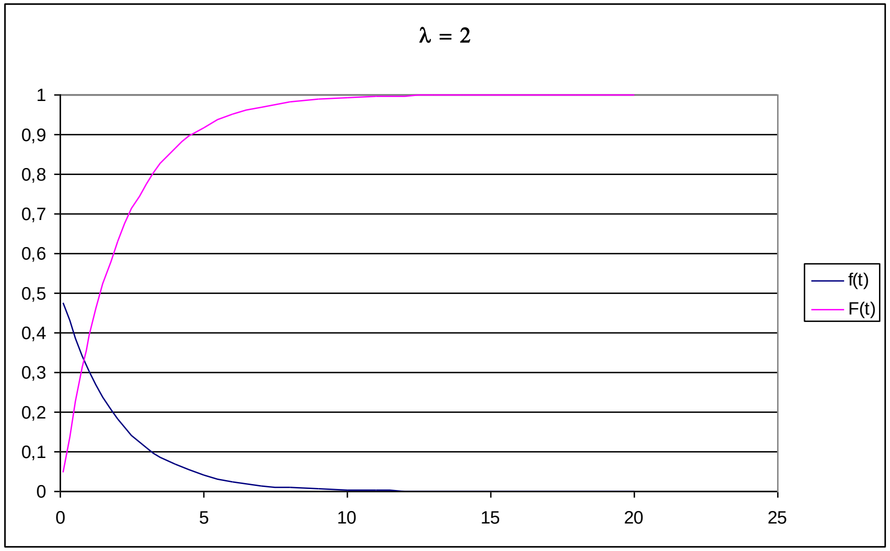
- Yleistys binomijakaumasta, joka on summa Booleanarvoisten muuttujien lukumäärästä
- Yleisemmin muuttujalla on diskreetti äärellinen määrä arvoja j = 1, ..., k
- Todennäköisyys $P(X_i = j) = p_j$, ja p_j:tten summa on 1
- Soveltuu esim. luokiteltuun vikadataan, jossa on useampia toisensa poissulkevia vikamoodeja
- Jokaisen luokan j reunajakauma on binomijakauma

Esimerkki jatkuvasta jakaumasta Eksponentiaalijakauma

- Tiheysfunktio $f(t) = \lambda \cdot \exp\{-\lambda t\}, t \geq 0$
- Kertymäfunktio $F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$

Tunnusluvut:

- $ET = 1/\lambda$
- $Var(T) = 1/\lambda^2$



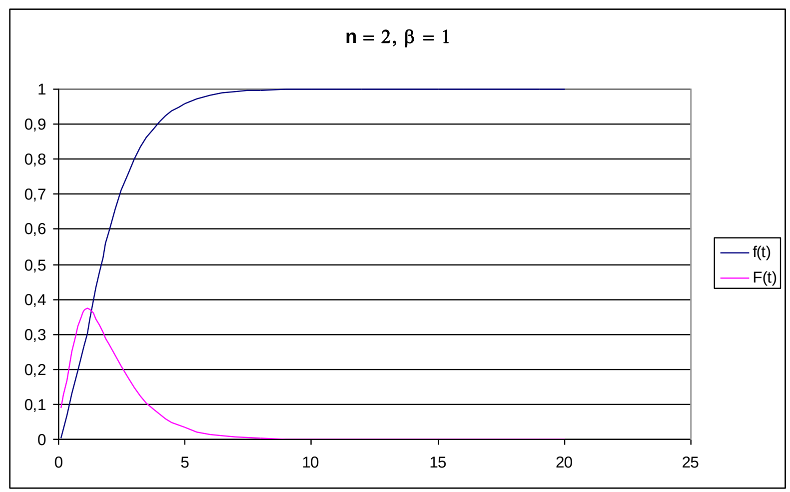
Esimerkki jatkuvasta jakaumasta
Erlangin jakauma

- n:n toisistaan riippumattoman eksponentiaalijakautuneen muuttujan summa S = T_1 + … + T_n

$$f(s) = \lambda \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$$

- Tunnusluvut:
  E[S] = n / λ
  Var[S] = n / λ^2
- kuuluu gammajakaumien perheeseen

$$f(s) = \lambda \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\beta x}$$



Todennäköisyystulkinnat (1/2)

- Subjektiivinen todennäköisyys
  - Kuvastaa kaiken käytettävissä olevan tietämyksen varaan perustuvaa näkemystä siitä, miten mahdollisena tapahtuman toteutumista pidetään
  - Näkökohtia
    - ”Kaikkea tietämystä” vaikea hankkia
    - Näkemykset voi poiketa toisistaan tai olla ristiriitaisia
    - Näkemykset päivitettävissä Bayesin kaavalla

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)},$$

    - missä $P(H)$ = Hypoteesin a priori tn
      $P(E)$ = Evidenssin saamisen tn
      $P(H|E)$ = Hypoteesin posteriori tn
- Todennäköisyydet riskianalyysissä
  - Ilmiöt monesti harvinaisia eivätkä toistettavissa
  - Sovelletaan usein subjektiivisia todennäköisyyksiä
  - Hyödynnetään käytettävissä olevia ja relevantteja tilastoja

Todennäköisyystulkinnat (2/2)

- Frekventistinen tulkinta
  - Todennäköisyys on raja-arvo, joka saadaan tarkastelemalla tilastollisesti äärettömän isoksi kasvavaa aineistoa
  - Esim. kruunan (eng. head) todennäköisyys saadaan raja-arvona sarjasta

$$P_H = \frac{N_H}{N}, N \to \infty,$$

jossa kolikkoa heitetään äärettömän monesti ja

jossa N = kaikkien heittojen määrä ja
N_H = saatujen klaavojen määrä

- Näkökohtia
  - Reaali-ilmiöillä riittäviä toistoja ei voida tehdä
    - » Mahdotonta, liian kallista, liian hidasta
    - » Esim. tuotannonohjaus, koronnostot, suojavallit
  - Toistot eivät tapahdu identtisissä olosuhteissa
  - Tilastot antavat kuitenkin tukea muille analyyseille

Luotettavuusparametrien estimointi

- Klassinen estimointi
- Bayes

Klassinen estimointi

- Satunnaismuuttuja X
- Kertymäfunktio $F(x; \theta_1, \ldots, \theta_r)$
- Parametrit $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ tuntemattomia
- Otos eli havainnot $(x_1, \ldots, x_n)$
- Mitkä parametrien arvot kuvaavat parhaiten X:n todennäköisyysteoreettista käyttäytymistä?
- Estimointi tapahtuu sijoittamalla havainnot kaavaan eli estimaattoriin, jonka antamaa tulosta käytetään parametrin estimaattina
- Piste-estimaatti on estimaattorin antama likiarvo estimoitavalle parametrille
- Väliestimaatti on otoksen ja estimaattorin määräämä väli, jonka sisäpuolella estimoitavan parametrin todellinen arvo jää annetulla todennäköisyydellä

Maximum likelihood eli suurimman uskottavuuden menetelmä

- Likelihoodfunktio $L(\theta) = f(x_1 ; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_1 ; \theta)$,
  missä $f(x_1 ; \theta)$ on tiheysfunktio

- Maximum likelihood –estimaatti on se joka maksimoi likelihoodfunktion eli havaittu otos on todennäköisin sillä arvolla

Momenttimenetelmä

- Satunnaismuuttujan momentti

$$m_k(\theta) = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

- Esimerkiksi m_1 on odotusarvo

- Otosmomentti

$$\widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Jos parametreja on yksi, ratkaistaan $m_1(\theta) = \widehat{m}_1$
- Jos parametreja on k kpl, muodostetaan yhtälöryhmä momenteista i = 1, ..., k

Binomijakauman p

- Otos n havaintoa, joista k kpl 1:ä ja n−k 0:a
- Satunnaismuuttuja X on 1:sten lukumäärä, ja on binomijakautunut parametrilla p
- Likelihoodfunktio

$$L(p) = P(X = k; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Derivoimalla p:n suhteen saadaan maksimi

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Poisson-prosessin (eksponenttijakauman) λ

- Otos n havaintoa ajanjaksolla T
- Satunnaismuuttuja X on havaintojen lukumäärä ja se on Poisson-jakautunut parametrilla λT
- Likelihoodfunktio

$$L(\lambda) = P(X = n; \lambda T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!}\exp(-\lambda T)$$

- Derivoimalla λ:n suhteen saadaan maksimi

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$$

Bayes

- Parametrit (θ_1, …, θ_r) käsitellään satunnaismuuttujina
- Likelihoodfunktio on ehdollinen todennäköisyys havaita otos (x_1, …, x_n) ehdolla tietyt parametrin arvot
- Parametrien priorijakauma päivitetään Bayesin kaavan avulla

$$P(\theta\,|E) = \frac{L(E|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} L(E|\theta)p(\theta)d\theta}$$

Bayesiläinen analyysi, binomijakauman p

- Havainnot $E = \{k_1, \ldots, k_n\}$ ovat Bernoullijakaumasta (0 tai 1), $P(k_i = 1) = p$
- Jos havainnot ovat riippumattomia, on likelihoodfunktio

$$L(p) = P(X = k; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Priorijakaumaksi valitaan tässä tapauksessa yleensä betajakauma, koska se on konjugaattijakauma binomiotannalle => Posteriorijakauma on myös beta

$$f(p; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

$$p \sim Beta(\alpha, \beta)$$

Binomijakauman p posteriorijakauman

- Posteriorijakaumaksi tulee

$$p \sim Beta(\alpha + k, \beta + n - k)$$

Binomijakauman p:n priorijakauma

- Kirjallisuudessa esitetään erilaisia vaihtoehtoja
  - Beta(0;0) = toimii vain jos 0 < k < n
  - Beta(0,5;0,5) = ns. epäinformatiivinen priori
  - Beta(1; 1) = tasajakauma
- Beta(0,5;0,5) on yleisimmin käytetty

- Posteriorijakauman odotusarvo

$$E[p|k,n] = \frac{k + 1/2}{n + 1}$$

Poisson-prosessin lambda

- Satunnaismuuttuja X on havaintojen lukumäärä ja se on Poisson-jakautunut parametrilla λT
- Likelihoodfunktio

$$L(\lambda) = P(X = n; \lambda T) = \lambda^n \exp(-\lambda T)$$

- Priorijakaumaksi valitaan tässä tapauksessa yleensä gammajakauma, koska se on konjugaattijakauma Poisson-otannalle => Posteriorijakauma on myös gamma

$$f(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$$

$$\lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

Poisson-prosessin lambda posteriorijakauma

- Posteriorijakaumaksi tulee

$$p \sim Gamma(\alpha + k, \beta + T)$$

Poisson-prosessin lambdan priorijakauma

- Gamma(0,5;0) = epäinformatiivinen priori ja yleisimmin käytetty

- Posteriorijakauman odotusarvo

$$E[\lambda|k,T] = \frac{k+1/2}{T}$$

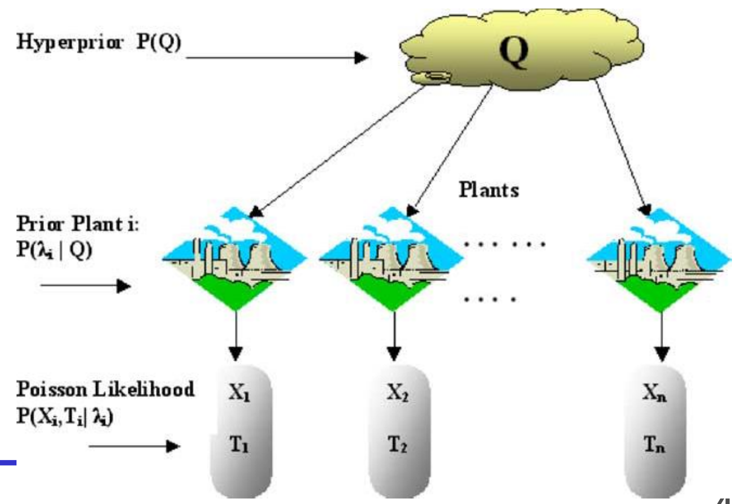
Kaksivaiheinen estimointi heterogeenisesta populaatiosta

- Vikatapahtumia kerätään useammalta laitokselta
- Laitoskohtainen data homogeenista
- Laitosten välillä eroa

- Esim. komponentin vikatodennäköisyys p_i laitoksella i, i = 1, ..., M
- Parametrit p_i, i = 1, ..., M estimoidaan yhteisesti kaikkien laitosten datasta, mutta oletetaan että p_i voi vaihdella laitoksittain
- Laitoskohtaisesti likelihoodfunktio kuten edellisissä kalvoissa
- Käytössä on erilaisia tapoja tehdä ”hierarkkinen” estimointi

Kaksivaiheinen bayesiläinen analyysi

- Laitoskohtaiset havainnot $E = \{(k_1, T_1), \ldots, (k_M, T_M)\}$ noudattaa Poissonjakaumaa parametreilla $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$
- Parametrit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$ ovat otos jostain populaatiosta $p(\lambda|\theta)$
- θ kutsutaan hyperparametriksi ja sen jakaumaan hyperprioriksi

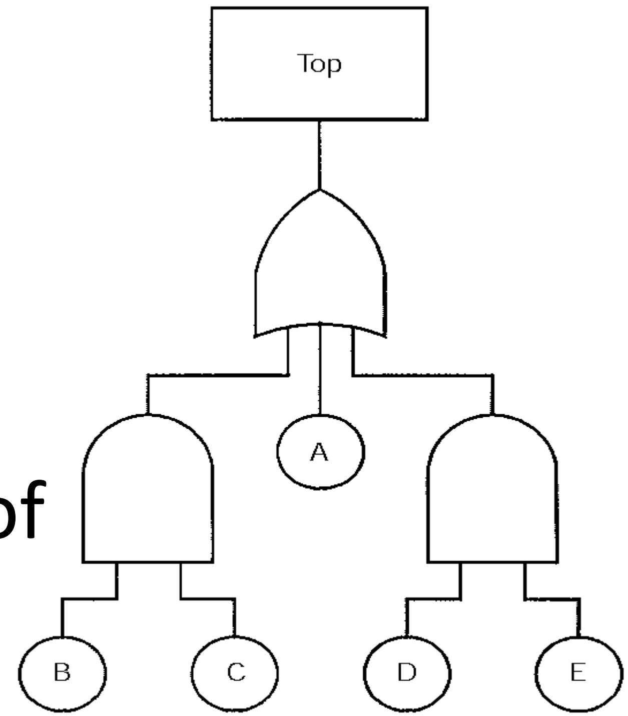


Bayesian networks (BN)

The following slides have been prepared by Alessandro Mancuso

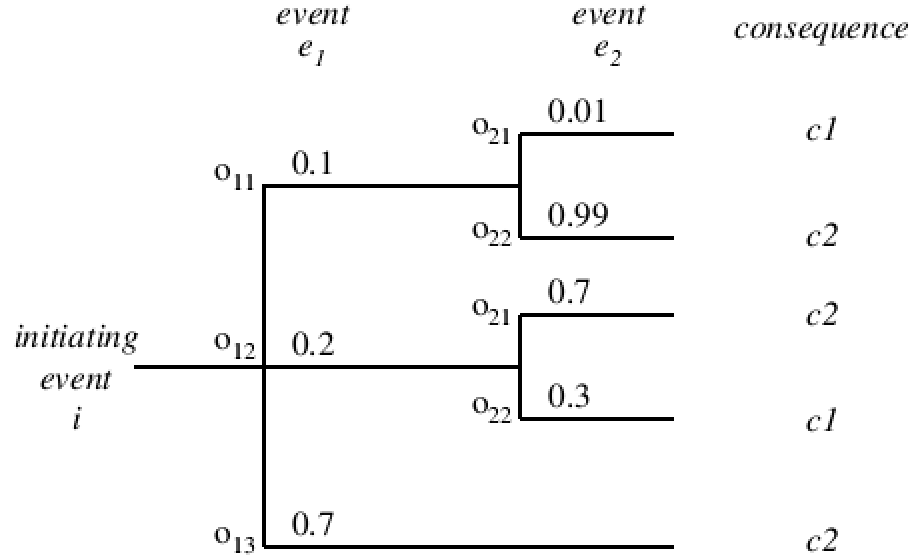
Fault tree analysis (FTA)

- Events are binary events (operating/not-operating)
- Events are statistically independent
- Relationships between events and causes are represented by logical AND and OR gates
- The undesirable event, called Top Event, is postulated and the possible ways for the occurrence of this event are systematically deduced



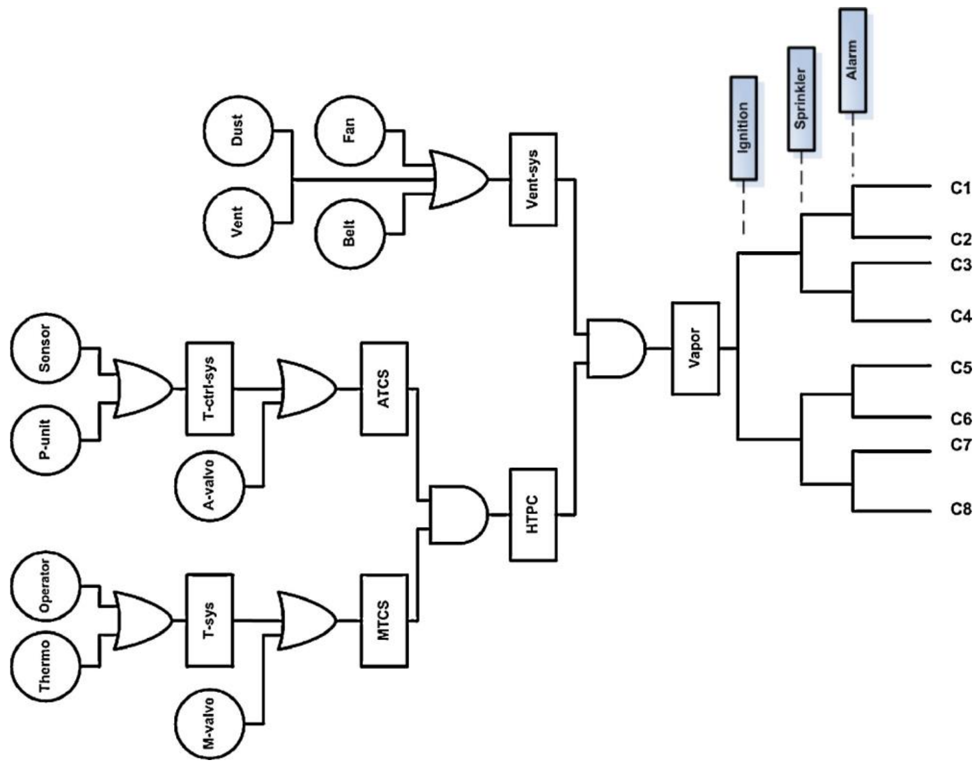
Event tree analysis (ETA)

- System evolution following the hazardous occurrence is divided into discrete events
- System evolution starts from an initiating event
- Each event has a finite set of outcomes (commonly there are two outcomes: occurring event or not occurring) associated with the occurrence probabilities
- The leaves of the ET represent the consequence scenarios to be analyzed



Bow-Tie analysis

- Bow-Tie (BT) combines the scenario modeling and quantification of FT and ET
- It represents an accident scenario from causes to effects



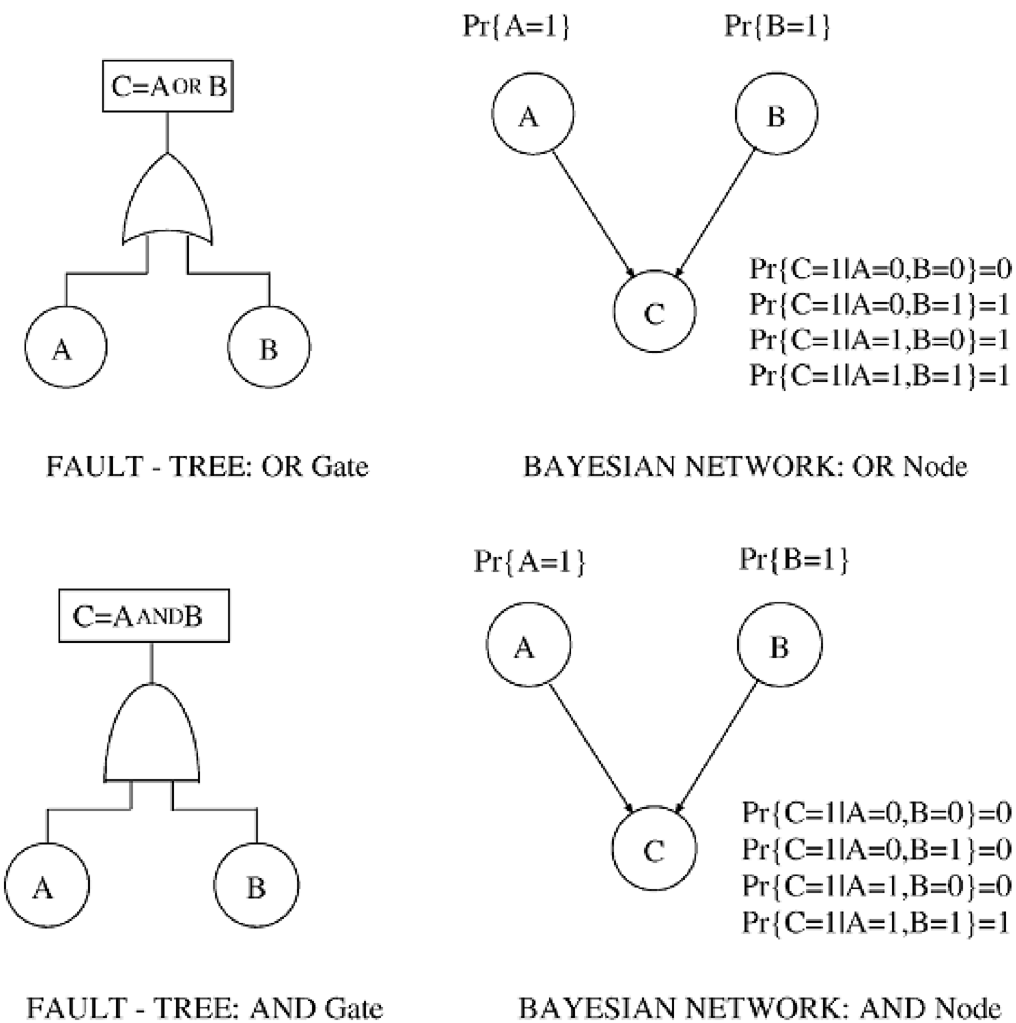
Bayesian Networks (BN)

- Also called Bayesian Belief Nets (BBN)
- Formally, a BN is a directed acyclic graph consisting of:
- Nodes $V = \{1, \dots, N\}$, shown as circles, represent random events
- Directed arcs $E \subseteq \{(i,j) | i,j \in V, i \neq j\}$ indicate conditional dependencies among nodes
  - the arc $(i,j) \in E$ which connects node $j \in V$ to node $i \in V$ shows that the event at node j is conditionally dependent to the event at node i

Why Bayesian Networks?

- BNs are probabilistic graphical models, which offers a convenient and efficient way of generating joint distribution of all its events
  - Convenient: causal relationships between events are easy to model
  - Efficient: no redundancies in terms of graphical modelling and probability computations
  - Flexible: capable of handling imprecise information by capturing quantitative and qualitative data
- Wide applicability, for instance:
  - Diagnosis: Microsoft trouble shooting wizard, Medical expert system
  - Classification: Spam email classification
  - Voice recognition

Mapping fault trees into BN

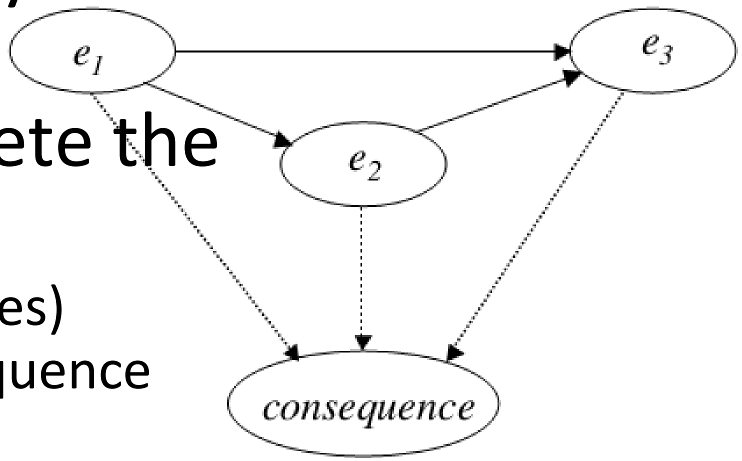


Switching from binary logic to probabilistic logic!

***Reference**:* Bobbio A., Portinale L., Minichino M., Ciancamerla E., "*Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into Bayesian networks",* Reliability Engineering and System Safety 71, pp. 249–260 (2001) .

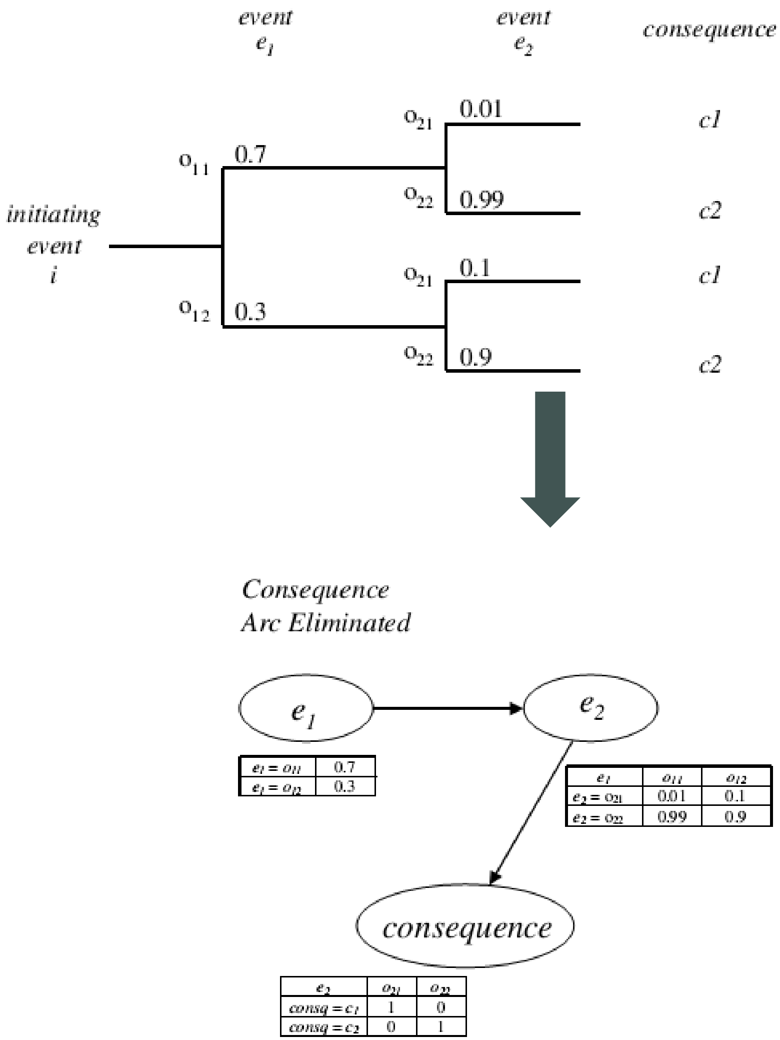
Mapping event trees into BN

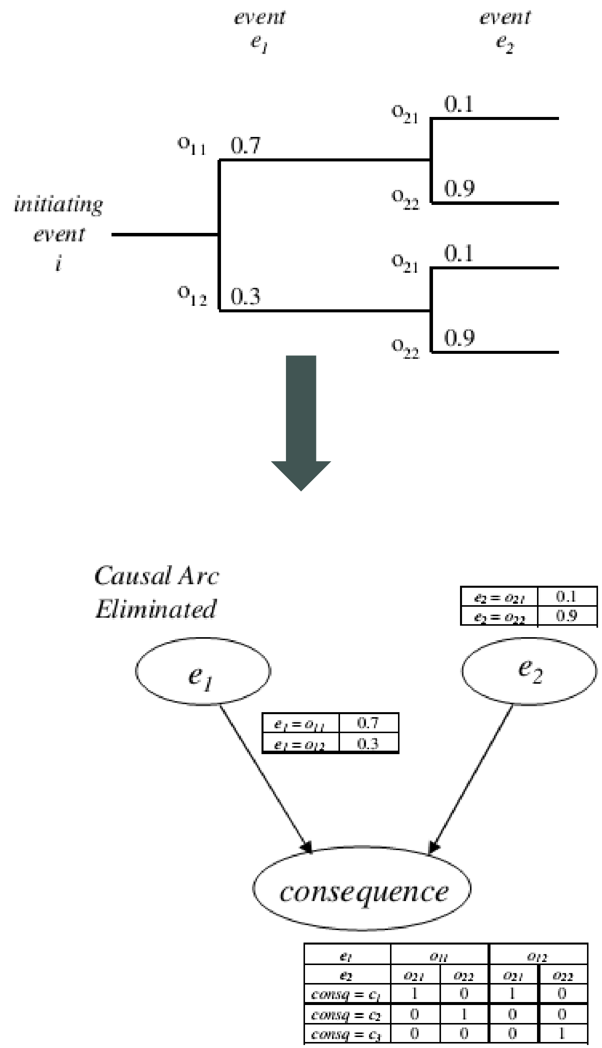
- Any event tree with three events $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, and $\boldsymbol{e_3}$ can be represented by the BN shown below
- Two types of directed arc complete the network:
  - Consequence arcs (shown as dotted lines) connect each event node to the consequence node
    - » This relationship is deterministic: the probability table for the consequence node encodes the logical relationship between the events and the consequences.
  - Causal arcs (shown as solid lines) connect each event node to all events later in time
    - » For instance, event $\boldsymbol{e_1}$ is a causal factor for event $\boldsymbol{e_2}$, thus it influences the probability of event $\boldsymbol{e_2}$.



Reference: Bearfield G., Marsh W., *"Generalizing Event Trees Using Bayesian Networks with a Case Study of Train Derailment"*, Computer Safety, Reliability, and Security (2005).

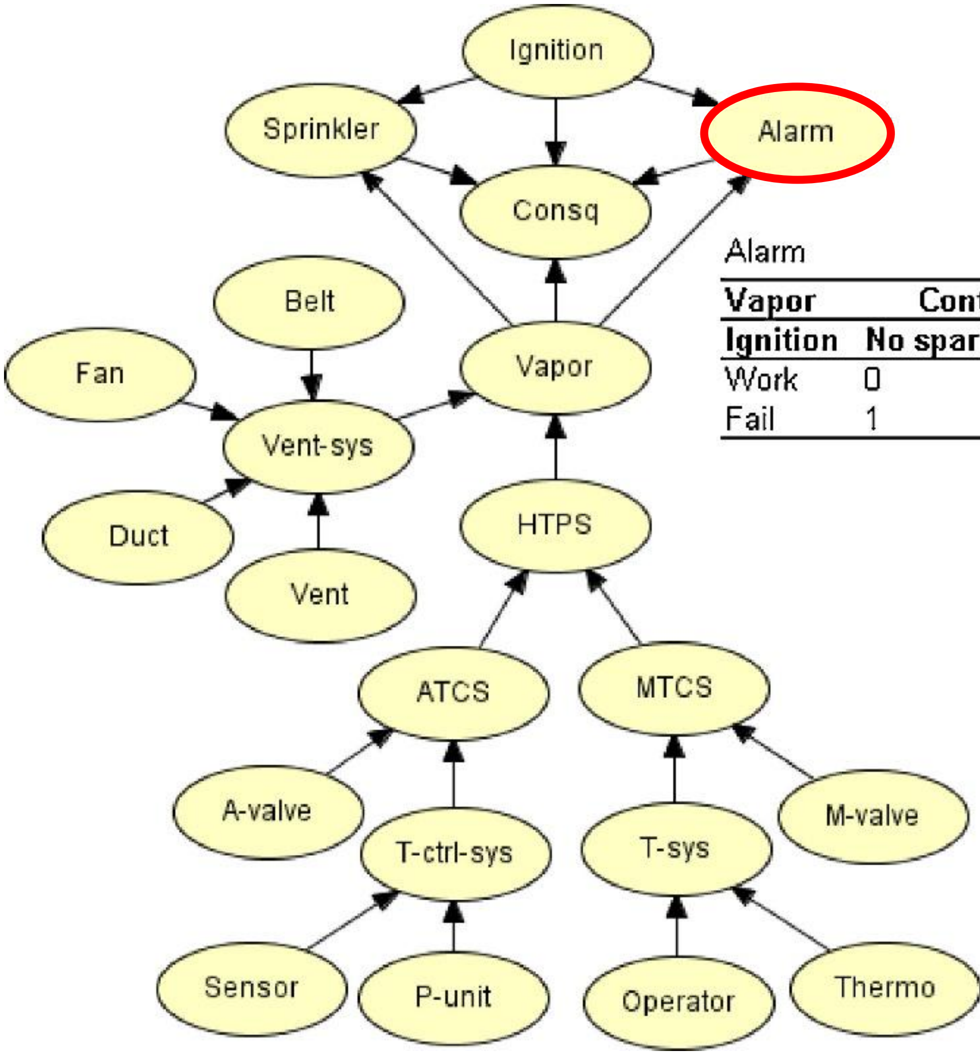
Mapping ET into BN (alternatives)





Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Advantages of Bayesian Networks



Mapping of Bow Tie (slide 4) into **BN**

Alarm

Vapor	Controlled		Overflow	
Ignition	**No spark**	**Spark**	**No spark**	**Spark**
Work	0	0	0.775	0.9987
Fail	1	1	0.225	0.0013

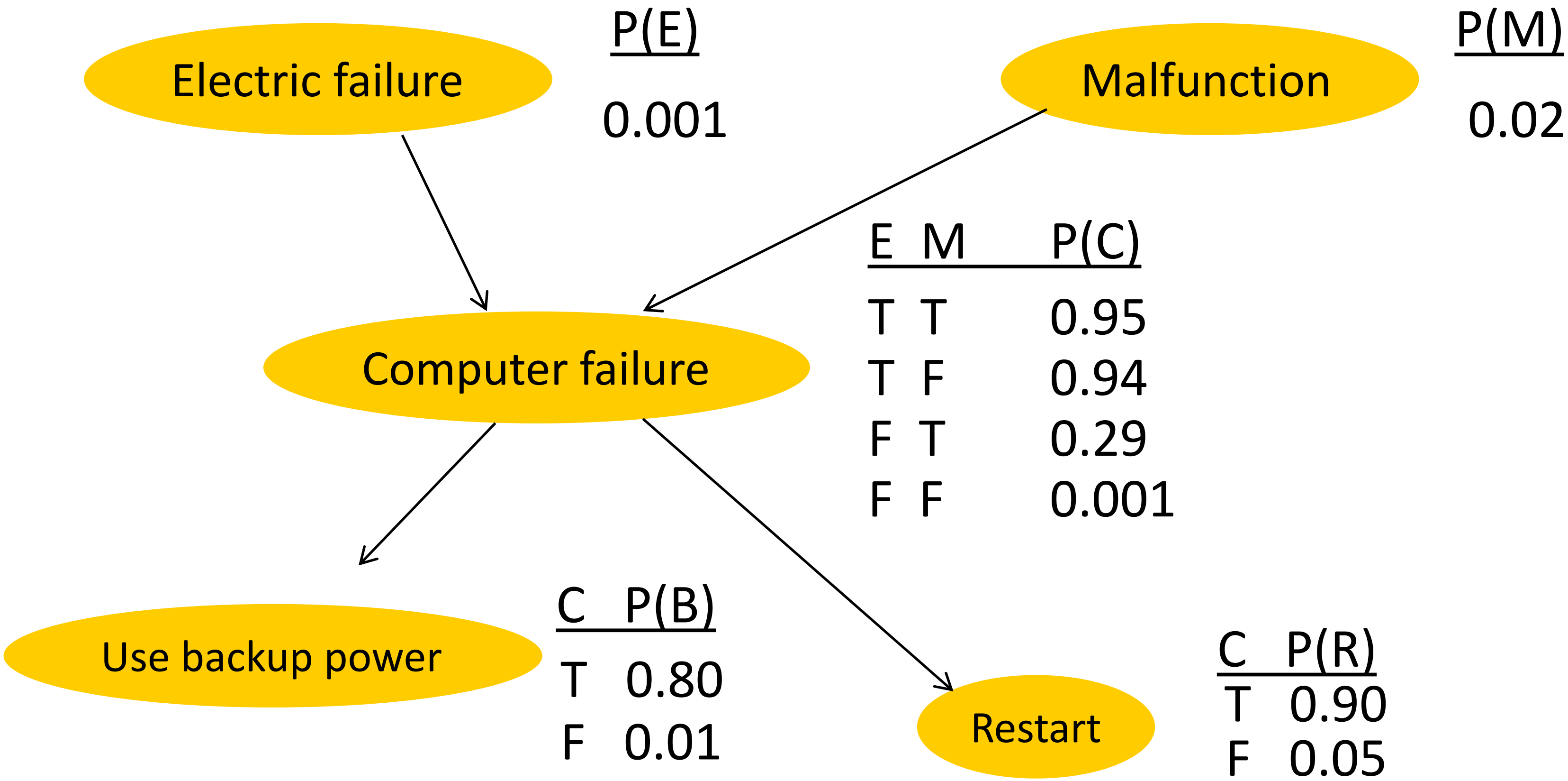
Advantages

- Multi-state modelling
- Extension of concepts of AND/OR gates through probability distributions
- Combining expert judgement and quantitative knowledge to estimate the risk

Failure probabilities

- Information sources
  - Information provided by AND/OR gates
  - Statistical analyses / Simulations
  - Expert elicitation
- The probabilities of events are defined as follows:
  - Initiating events → failure probabilities of system components
  - Intermediate and top events → conditional probability tables (CPT)

Bayesian Network representation



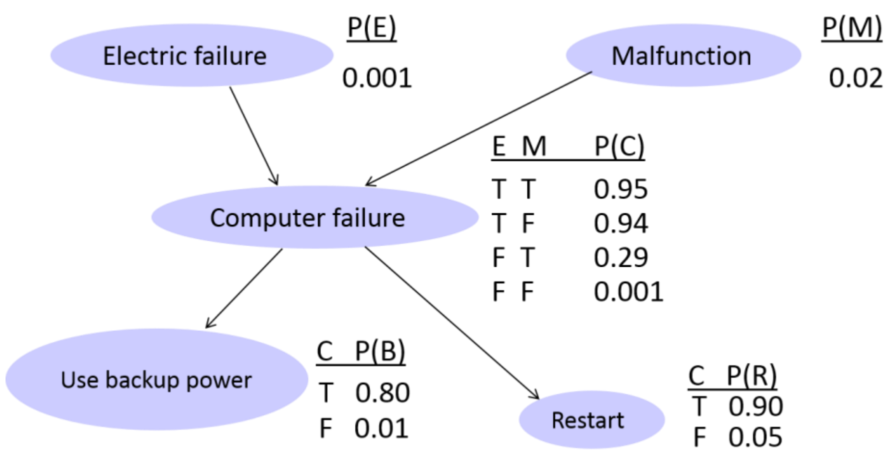
Inference on Bayesian Networks

- Query: Assuming to collect some observations (evidence) from the system, how would this evidence impact the probabilities of the events?
- The conditional probability of a random event given the evidence is known as a posteriori belief, useful in case of:
  - Prediction: computing the probability of an outcome event given the starting condition → Target is a descendent of the evidence!
  - Diagnosis: computing the probability of disease/fault given symptoms → Target is an ancestor of the evidence!
- Note: the direction between variables does not restrict the directions of the queries → Probabilistic inference can combine evidence form all parts of the network!

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Examples of inference: Prediction

- For the computer failure example, what it is the probability that the backup power is working given an electrical failure?



$$P(B|E) = P(B|C)P(C|E) + P(B|\bar{C})P(\bar{C}|E)$$

$$P(C|E) = P(C|\bar{M},E)P(\bar{M}) + P(C|M,E)P(M)$$

$$P(C|E) = 0.98 \cdot 0.94 + 0.02 \cdot 0.95 = 0.94$$

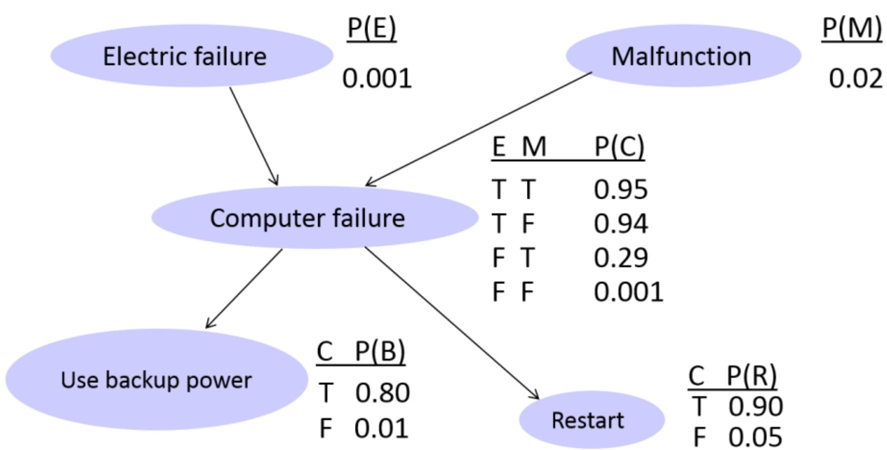
$$P(B|E) = P(C|E) \cdot 0.8 + P(\bar{C}|E) \cdot 0.01$$

$$P(B|E) = 0.94 \cdot 0.8 + 0.06 \cdot 0.01 = 0.75$$

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Examples of inference: Diagnosis

- For the computer failure example, what it is the probability that the electricity is working given a backup power failure?



$$P(E|B) = \frac{P(B|E)P(E)}{P(B)}$$

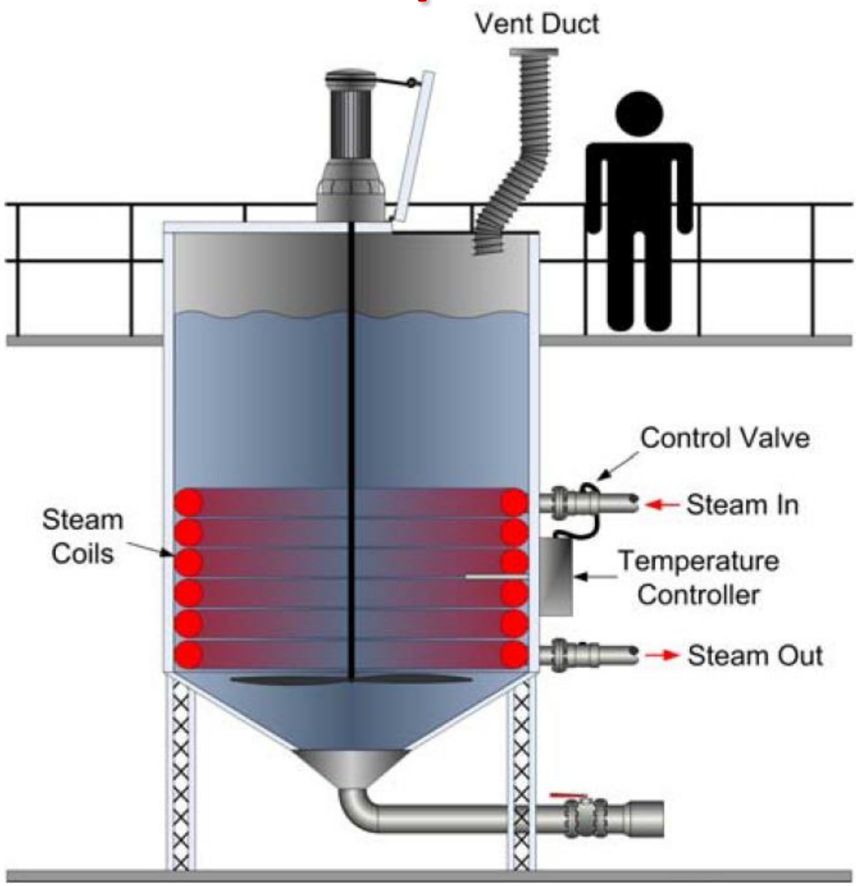
$$P(E|B) = \frac{0.75 \cdot 0.001}{0.0161} = 0.0468$$

$$P(C) = P(C|E,M)P(E)P(M) + P(C|E,\bar{M})P(E)P(\bar{M}) + P(C|\bar{E},M)P(\bar{E})P(M) + P(C|\bar{E},\bar{M})P(\bar{E})P(\bar{M}) = 0.0077$$

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|\bar{C})P(\bar{C})$$

$$P(B) = 0.8 \cdot 0.0077 + 0.01 \cdot 0.9923 = 0.0161$$

Illustrative example



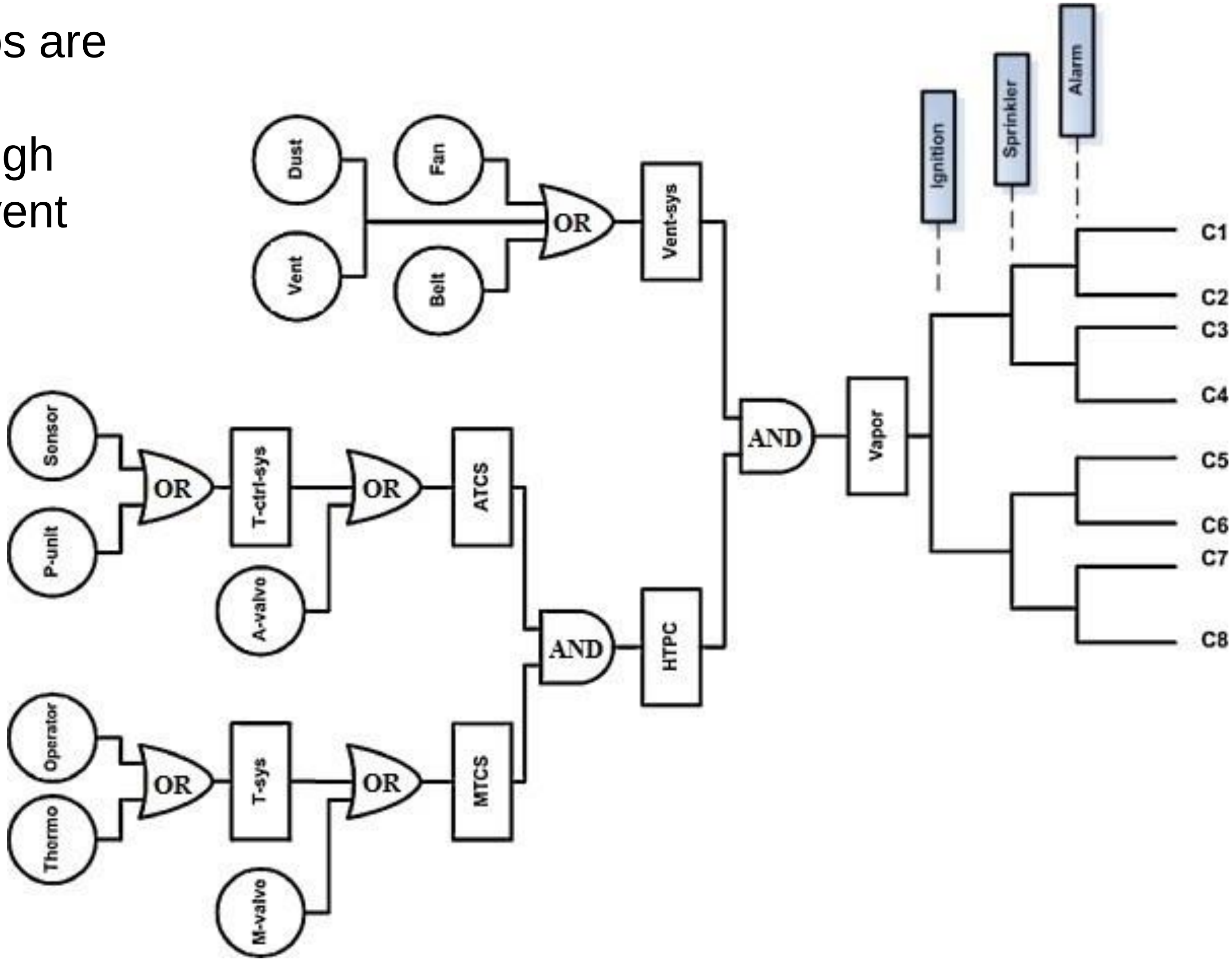
Accident scenario of a **vapor cloud ignition** at Universal Form Clamp in Illinois, US on June 14 2006.

Component	Failure probability
Sensor	0.0400
Pneumatic unit	0.2015
Temperature control system	OR-gate
Operator	0.0200
Infrared thermometer	0.0468
Temperature measurement system	OR-gate
Manual steam valve	0.0243
Automatic steam valve	0.0276
Automatic temperature control system	OR-gate
Manual temperature control system	OR-gate
High temperature protection system	AND-gate
Ventilation	0.0150
Fan	0.0100
Belt	0.0500
Duct	0.0010
Ventilation system	OR-gate
Vapour overflow	AND-gate
Ignition barrier	0.1000
Water sprinkler system	0.040, 0.3000
Alarm system	0.0013, 0.2250

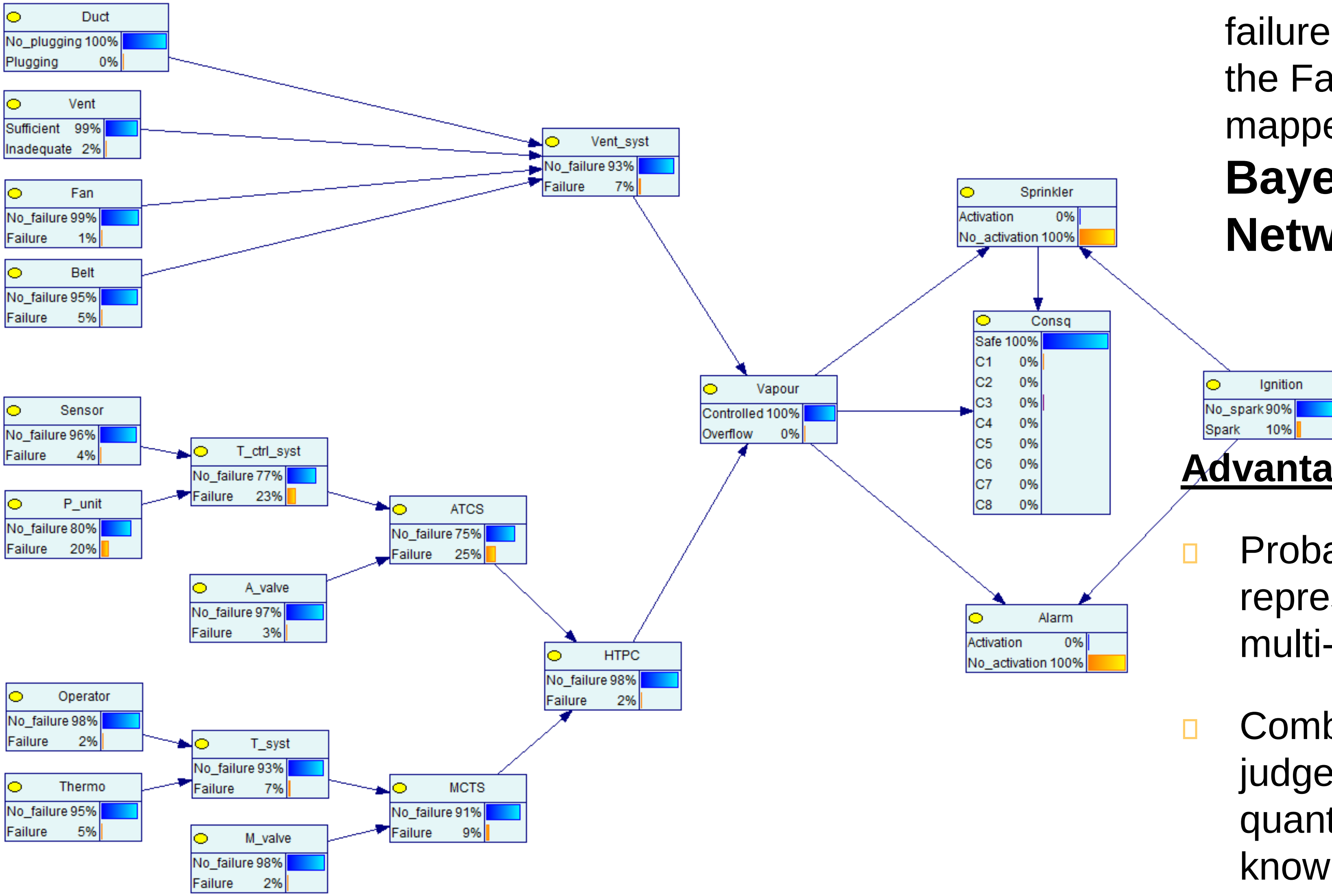
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Accident scenarios

Accident scenarios are traditionally represented through Fault Tree and Event Tree



Bayesian representation

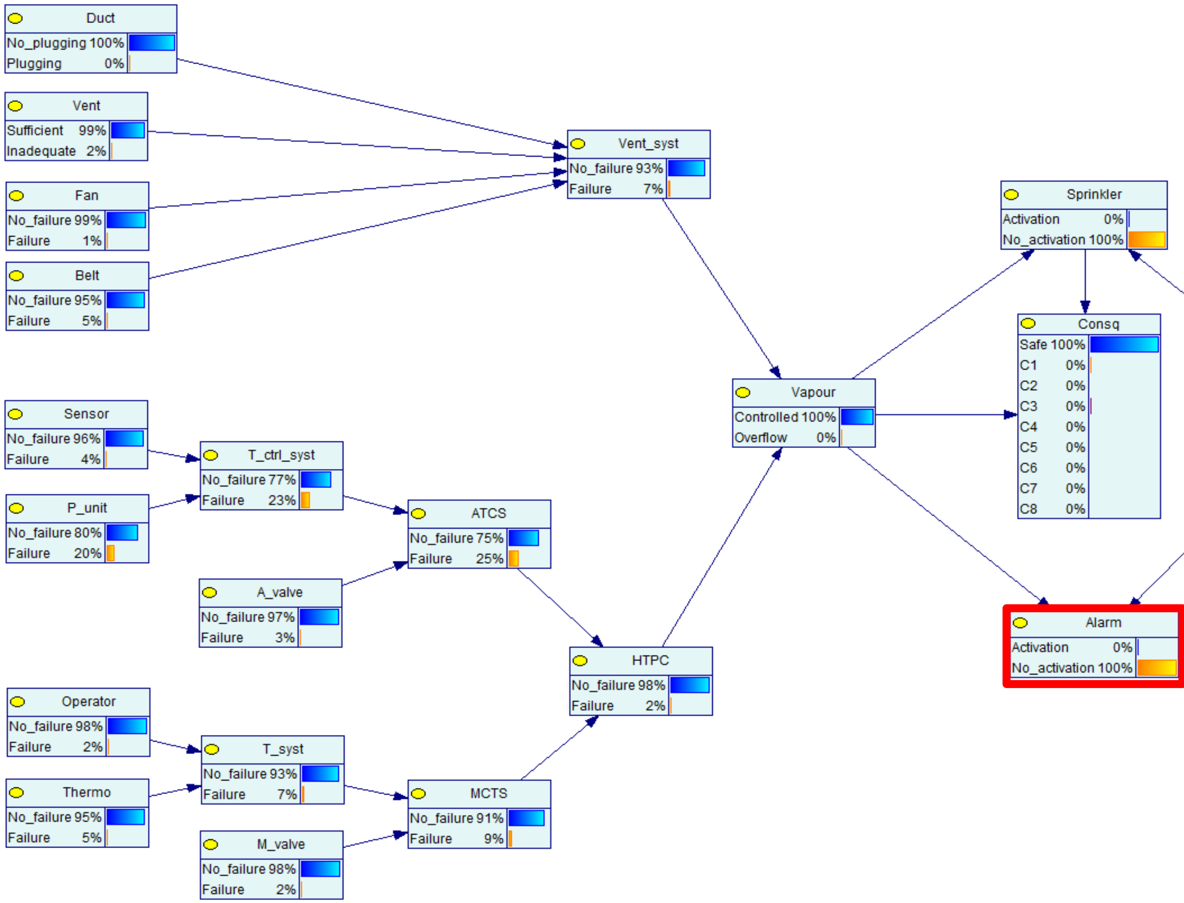


To analyze the failure scenarios, the Fault Tree is mapped into a **Bayesian Network**.

Advantages

- Probabilistic representation of multi-state events.
- Combining expert judgement and quantitative knowledge.

Definition of mitigation actions



Mitigation actions improve the reliability of the components, thus they mitigate the residual risk of the *overall system*.

Action	Cost	Prob
Semi conductor sensor	60	0.2
Catalytic gas sensor	80	0.15
Electrochemical cells	110	0.1

Results

Minimum residual risk for the optimal portfolios of actions at different budget levels.

Larger budget
⇒ more effective actions
⇒ lower residual risk of failure