

### Onsdag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast onsdag kl. 08:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast fredag kl. 12:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)
- HA1. En diskret slumpvariabel  $W$  sådan att  $\mathbb{P}(W = 1) = p$  och  $\mathbb{P}(W = 0) = 1 - p$ , där  $0 \leq p \leq 1$ , säges vara *Bernoulli-fördelad* med parametern  $p$ . Detta betecknas  $W \sim \text{Ber}(p)$ . För att bestämma en skattning av  $p$  kan vi ta ett (oberoende) stickprov  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  bestående av  $n$  utfall av  $W$  och beräkna summan  $X = \sum_{i=1}^n W_i$ .
- a) Visa att medelvärdet  $X/n$  är moment-skattningen av  $p$ , dvs.  $\widehat{p}_{MM} = X/n$ .
  - b) Visa att maximum likelihood-skattningen  $\widehat{p}_{ML}$  av  $p$  också är  $X/n$ .  
(Denna skattning är väntevärdesriktig, eftersom  $\mathbb{E}[X/n] = p$ .)
- HA2. Då 2500 slumpmässigt utvalda vuxna finländares längder mättes, fick man som stickprovets medelvärde  $m(\bar{x}) = 170.9$  cm och som stickprovets standardavvikelse  $sd_S(\bar{x}) = 11.4$  cm. Bestäm med hjälp av stickprovet ett symmetriskt konfidensintervall med approximativa konfidensgraden 99% för medellängden hos vuxna finländare.
- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)
- IA1. Vi tog stickprovet  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  från en normalfördelning  $N(\mu, \sigma^2) = N(\mu_X, 0.02^2)$  och stickprovet  $y_1, y_2, \dots, y_{50}$  från  $N(\mu, \sigma^2) = N(\mu_Y, 0.05^2)$ . Vi fick stickprovsmedelvärdena  $\bar{x} = 0.51$  resp.  $\bar{y} = 0.69$ . Bestäm ett tvåsidigt 0.90 konfidensintervall för skillnaden  $\mu_Y - \mu_X$ .
- IA2. a) Ett tobaksbolag påstår att nikotinnehållet i deras cigaretter är en slumpvariabel med väntevärdet  $2.2\text{mg}$  och standardavvikelsen  $0.3\text{mg}$ . Ett stickprov bestående av 100 slumpmässigt utvalda cigaretter visade sig dock ha ett genomsnittligt nikotinnehåll på  $3.1\text{mg}$ . Använd normalapproximationen (som med tanke på stickprovets storlek torde vara motiverad) för att approximera sannolikheten att ett stickprov bestående av 100 cigaretter har ett genomsnittligt nikotinnehåll på minst  $3.1\text{mg}$ , om bolagets påståenden gällande väntevärdet och standardavvikelsen stämmer.
- b) Tobaksbolaget försvarade sig med att det inte finns något anledning att anta att nikotinhaltarna är normalfördelade, så normalapproximationen ger inget korrekt mått på denna sannolikhet. Använd Chebyshevs olikhet för att få en övre gräns för denna sökta sannolikhet.

### Fredag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast söndag kl. 24:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)
- HB1. Hankeiten Pelle har fyra 6-sidiga tärningar i en ask: tre vanliga, där alla ögonantalen har sannolikheten  $\frac{1}{6}$  och en viktad tärning, som ger ögonantalet 1 med sannolikheten  $\frac{1}{4}$ , 6 med sannolikheten  $\frac{1}{12}$  och de övriga med sannolikheten  $\frac{1}{6}$ . En gång lånade Svakar en av tärningarna utan att veta, om den var viktad eller inte. Om slumpvariabeln  $\Theta$  har värdet 1, om tärningen är viktad och värdet 0 annars, så ges Svakars *priori*-fördelning för  $\Theta$  följaktligen av

$$p_0(\theta) = \begin{cases} 1/4, & \text{om } \theta = 1 \\ 3/4, & \text{om } \theta = 0 \end{cases}$$

- a) För att bättre kunna avgöra, om tärningen var viktad eller inte (dvs. om  $\Theta = 1$  eller 0) kastade Svakar tärningen 4 gånger och fick ögonantalen 3, 6, 3, 1. Bestäm *posteriori*-fördelningen  $p_1(\theta) = C_1 \cdot p_0(\theta) \cdot f(\bar{x}|\theta)$ , där  $\theta \in \{0, 1\}$  och konstanten  $C_1$  bestäms av att  $\sum_{\theta=0}^1 p_1(\theta) = 1$ .
- b) För att få en ännu bättre uppfattning kastade Svakar tärningen ytterligare 8 gånger och fick ögonantalen 5, 1, 3, 4, 1, 5, 1, 1. Bestäm den nya *posteriori*-fördelningen  $p_2(\theta) = C_2 \cdot p_1(\theta) \cdot f(\bar{x}|\theta)$ , där  $\theta \in \{0, 1\}$  och konstanten  $C_2$  bestäms av att  $\sum_{\theta=0}^1 p_2(\theta) = 1$ .

- HB2. Svakar undersöker en Poisson-fördelad slumpvariabel  $X \sim Po(\lambda)$ , där parametern  $\lambda > 0$ . Han betraktar  $\lambda$ 's värde som en slumpvariabel  $\Lambda$  med utfallsrummet  $S_\Lambda = ]0, \infty[$ , vars priori-fördelning han antar vara

$$p_0(\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda} & , \lambda \in S_\Lambda, \\ 0 & , \lambda \notin S_\Lambda. \end{cases}$$

Han bestämde sig för att ta ett stickprov  $\bar{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , beräkna posteriori-fördelningen  $p_1(\lambda)$ , som stickprovet ger och använda posteriori-fördelningens väntevärde som sitt estimat av  $\lambda$ .

Han fick stickprovet  $\bar{x} = \{0, 3, 1\}$ . Bestäm posteriori-fördelningen  $p_1(\lambda)$  samt estimatet av  $\lambda$ .

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast söndag kl. 24:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

- IB1. Svakar har fyra tärningar: en tärning med 6 sidor, en med 8 sidor, en med 12 sidor samt en med 20 sidor, alla med sidorna numrerade från 1 och uppåt. Han väljer tärning genom att dra ett kort ur en välblandad kortlek: drar han en spader väljer han den 6-sidiga tärningen, hjärter svarar mot den 8-sidiga, klöver mot den 12-sidiga och ruter mot den 20-sidiga, så priori-sannolikheten att han väljer den  $n$ -sidiga tärningen är  $\frac{1}{4}$  för  $n \in \{6, 8, 12, 20\}$  (jämför med uppgift IB1, övning 1).

a) Efter att Svakar valt tärningen enligt beskrivningen ovan, kastar han den och får en 4:a. Vad är posteriori-sannolikheterna för de olika tärningarna?

b) Då Svakar ånyo kastar tärningen, får han en 7:a, varvid vi vet, att han inte valt den 6-sidiga tärningen. Vad är de nya posteriori-sannolikheterna för de olika tärningarna?

- IB2. Väntetiderna  $x_i$  (i *min*) olika vardagar vid en busshållplats är oberoende och likformigt fördelade i intervallet  $[0, \theta]$ , så deras täthetsfunktion ges av

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{om } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Den okända parametern  $\theta$  kan tolkas som tiden mellan bussturerna vid den aktuella hållplatsen.

På basis av sina erfarenheter om bussarna antar Svatta, att tiden mellan bussturerna är minst 1*min*. Hon tolkar parametern som en kontinuerlig slumpvariabel  $\Theta$  och väljer som täthetsfunktion för dess *priori*-fördelning

$$p_0(\theta) = \begin{cases} 2\theta^{-3}, & \text{om } \theta \geq 1(\text{min}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Svatta bestämmer sig för att använda väntevärdet för  $\Theta$ 's *posteriori*-fördelningens som sin punkt-skattning av tiden  $\theta$  mellan bussturerna. Beräkna denna skattning, om hennes väntetider under en veckas vardagar var  $\bar{x} = \{2, 6, 3, 4, 8\}$  (*min*).

- Temat för Stack-uppgifterna (som fås via länken på kursens hemsida i MyCourses och som skall vara attackerade senast söndag kl. 24:00 ifrågavarande vecka)
  - S1. Bestämmande av väntevärde och varians
  - S2. Maximum likelihood-skattning
  - S3. Konfidensintervall
  - S4. Dito
  - S5. Dito