Tehtävä 1: Fourier-muunnos ja aaltopaketin propagointi

Tarkastellaan aaltopaketin leviämistä yhdessä ulottuvuudessa, esimerkiksi pisaran putoamisen aiheuttamaa aaltoa kapeassa kourussa olevan veden pinnalla, tai vaikka jokeen pudonneen kiven aiheuttamaa hyökyaaltoa joen pituussuunnassa. Tehtävän tarkoitus on ensisijaisesti havainnoida aaltojen käyttäytymistä, hahmottaa hieman Fourier-muunnoksen ideaa sekä tehdä data-analyysiä.

Avaa tietokoneellasi matlab. Odotellessasi sen käynnistymistä, hae kurssin MyCourses-sivulta, Viikko 3-lehden lehden takaa matlab-skriptitiedostot gaussian_wavepacket_expansion_1.m, gaussian_wavepacket_expansion_2.m ja gaussian_wavepacket_expansion_3.m.

Alustus ja jakauman keskihajonta

a) Avaa gaussian_wavepacket_expansion_1.m ohjelma matlabissa. Alla on lyhyt esittely koodin rakenteesta, käykää esittely läpi niin suunnilleen tiedätte mitä koodi tekee. Koodi on kommentoitu, eikä sitä tarvitse tätä tehtävää varten muokata.

b) Aja koodi. Ruudulle tulostuu ensimmäinen kuvaaja. Koodi pysähtyy aina pause-komennon kohdalle, josta koodi jatkaa ajoaan kun jotakin näppäintä painetaan. Paina esimerkiksi välilyöntiä.

c) Ensimmäinen piirtynyt kuvaaja esittää alkuperäistä alustettua gaussista aaltopakettia, joka sijaitsee $x = 0$ läheisyydessä. Kuvaajassa näkyy myös aaltopaketin (jakauman) keskihajonta. Keskihajonta antaa arvion jakauman leveydestä ja käytämme sitä myös jatkossa. Paina jälleen välilyöntiä.

d) Seuraava kuvaaja on alkuperäisen paikka-avaruuden aaltopaketin $y(x)$ cosinimuunnos k_n. Huomaa, että muunnoksen muoto on myös gaussinen (tosin vain positiiviset indeksin arvot ovat mukana ja lisäksi x-akseli on diskreetti). Tämä onkin gaussisen funktion ainutlaatuinen ominaisuus! Paina jälleen välilyöntiä.

e) Edellisessä kohdassa cosinimuunnos esitettiin indeksin n avulla. Mutta jokaista indeksiä vastaa kyseisen harmonisen aallon aaltoluku $k_n = 2\pi/Ln$. Seuraava kuvaaja esittääkin sekä paikka-avaruuden aaltopaketin (saman kuin aiemmin c-kohdassa) että cosinimuunnetun kuvaajan mutta jälkimmäinen on esitetty nyt aaltoluvun k_n funktiona. Nyt kuvaajassa on näkyvissä myös tämän cosinimuunnoksen keskihajonta. Paina jälleen välilyöntiä.

Heisenbergin epätarkkuusperiaate

f) Nyt on vuorossa sarja erilaisia gaussisia aaltopaketteja ja niiden cosinimuunnoksia. Kuvaaja näyttää molemmat sekä molempien keskihajonnat. Kirjatkaa ylös keskihajonnat. Mitä huomaatte? Aaltopaketin paikka ja sen aaltoluku ovat konjugaattimuuttujia, eli niille pätee Heisenbergin epätarkkuusperiaate: epätarkkuuksien tulo on aina suurempi kuin jokin vakio. Ei toki ole selvää etteikö jollakin sopivalla jakaumalla tuota keskihajontojen tuloa voisi pienentää, mutta osoittautuu että gaussiselle aaltopaketilla tuo tulo on itseasiassa pienin mahdollinen.

Syvässä vedessä etenevän aaltopaketin aikakehitys

g) Avaa gaussian_wavepacket_expansion_2.m ohjelma matlabissa ja aja koodi.

h) Ohjelma esittää animaation aaltopaketin aikakehityksestä. Simulaatio jatkuu ajan hetkeen $t = 20$ asti. Kuvaajat näyttävät niin paikka-avaruuden aikapaketin kuin sen kosinimuunnoksen aikakehityksen. Tunnista kuvasarjasta miten pitkät aallonpituudet propagoivat nopeasti ja lyhyet aallonpituudet hitaammin.

Alkuperäinen koodi olettaa, että vesi on syvää, jolloin aaltojen nopeus noudattaa relaatiota $v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Koska alkuperäinen aaltopaketti koostuu useasta eri aallonpituudesta, ja kukin aallonpituus etenee eri nopeudella, on luonnollista että aaltopaketti leviää tai hajoaa. Tällaista väliainetta jossa aaltojen nopeus riippuu tavalla tai toisella aallonituudesta kutstutaan dispersoivaksi, eli hajoittavaksi väliaineeksi.

Esimerkiksi syvässä vedessä etenevien aaltojen etenemisnopeus riippuu aallonpituudesta ja kyseessä on siis dispersoiva väliaine. Sama pätee myös esimerkiksi väliaineessa etenevään valoon, mihin perustuu esimerkiksi prisman valkoista valoa spektriksi hajoittava ominaisuus.

Vastaavasti, jos nopeus ei riipu aallonpituudesta, on kyseessä ei-dispersoiva väliaine. Ei-dispersoiva väliaine säilyttää aaltopakettien muodon. Tällaista on esimerkiksi valon eteneminen tyhjiössä ja äänen eteneminen ilmassa.

Matalassa vedessä etenevän aaltopaketin aikakehitys

Edellä tarkasteltiin vesiaaltoja syvän veden rajalla jolloin aaltopaketin havaittiin leviävän väliaineen dispersiivisyydestä johtuen. Mutta veden dispersiivisyys riippuu veden syvyydestä. Seuraavaksi käytetään samaa koodia kuin edellä, mutta korvataan syvän veden aallot matalan veden aalloilla.

i) Avaa gaussian_wavepacket_expansion_3.m ohjelma matlabissa ja aja koodi.
j) Nyt nopeus noudattaa relaatiota $v(\lambda) = \sqrt{gh}$, missä h on veden syvyys. Miten kuvailisit aaltopaketin propagointia suhteessa edellä laskettuun?
k) Mitä tapahtuu aikakehityksen loppuvaiheessa, noin ajanhetkellä $t = 16$? Selittäkää ilmiö.

Koodin rakenne

Vielä koodin rakenteesta lyhyt selvitys

- gaussisen aaltopaketin $y(x)$ alustus paikka-avaruudessa
- aaltopaketin cosini-muunnos
- aaltopaketin cosini-muunnoksen aikakehitys
- aaltopaketin cosini-muunnoksen käänteismuunnos, eli paluu paikka-avaruuteen $y(x,t)$

Alla on vielä lisätietoa mitä tarkalleen ottaen koodissa tehdään, mutta tällä tarkkuudella ei tarvitse koodin rakennetta tuntea, jos matlab-syntaksi ja/tai Fourier-muunnosa ei ole entuudestaan tuttua.

Koodin rakenne: cosini-muunnos

Aaltopaketin cosini-muunnoksessa esitämme aaltopaketin $y(x)$ cosini-funktioiden sarjakehitelmänä

$$y(x) = \sum_{n=0}^{100} k_n \cos(\frac{2\pi n}{L}x), \tag{1}$$

missä kertoimet k_n saadaan hyödyntäen cosini-funktioiden ortogonalisuutta. Eli kerrotaan yo. yhtälö funktiolla $\frac{2}{L}\cos(\frac{2\pi m}{L}x)$:

$$\frac{2}{L}\cos(\frac{\pi m}{L}x)y(x) = \sum_{n=0}^{100} k_n \frac{2}{L}\cos(\frac{2\pi m}{L}x)\cos(\frac{2\pi n}{L}x). \tag{2}$$

Integroidaan x määrittelyalueessa eli $x \in \{-L/2, L/2\}$.

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos(\frac{2\pi m}{L}x)y(x)dx = \sum_{n=0}^{100} k_n \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos(2\frac{\pi m}{L}x)\cos(2\frac{\pi n}{L}x)dx. \tag{3}$$

Wolfram alpha kertoo meille oikeanpuolen integraalin arvon

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos(\frac{2\pi m}{L}x)\cos(2\frac{\pi n}{L}x)dx = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = m \\ 0, & \text{jos } n \neq m. \end{cases} \tag{4}$$

Saamme siis

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos(2\frac{\pi m}{L}x)y(x)dx = k_m. \tag{5}$$

Eli laskemalla numeerisesti vasemmanpuoleinen integraali (koodissa trapz-funktiolla) saadaan määriteltyä Fourier-kertoimet k_m. Lopputuloksena on vektori $(k_0, k_1, \ldots, k_{100})$.

Koodin rakenne: aikakehitys

Aikakehitystä varten todetaan ensin, että alkeisaallon $\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$ aallonpituus on $\lambda_n = \frac{L}{n}$. Aalloille pätee yleisesti taajuuden, nopeuden ja aallonpituuden välinen relaatio $c = f\lambda$. Jos siis aallon etenemisnopeus on (syvän veden tapauksessa) $c(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$, niin $f(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{\lambda}$. Kun tekee kaikki eo. sijoitukset, nähdään että alkeisaalto $\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$ värähtelee taajuudella

$$f_n = f(\lambda_n) = f(\frac{L}{n}) = \sqrt{\frac{gL}{2n\pi}}\frac{n}{L} = \sqrt{\frac{g}{2L\pi}}\sqrt{n}. \tag{6}$$

Alkeisaalto $\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$ värähtelee siis taajuudella f_n. Tämä aikariippuvuus saadaan kuvattua yleistämällä alkeisaalto näin

$$\cos(\frac{2\pi n}{L}x - 2\pi f_n t), \tag{7}$$

joka kuvaisi nyt oikealle etenevää aaltoa. Vastaavasti vasemmalle etenevä aalto olisi

$$\cos(\frac{2\pi n}{L}x + 2\pi f_n t). \tag{8}$$

Koska alkuperäinen aaltopakettimme on symmetrinen oikean ja vasemman suunnan suhteen, on aallon aikakehitys näiden kahden eri suuntiin etenevien aaltojen superpositio (tai lineaarikombinaatio) eli

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\frac{2\pi n}{L}x - 2\pi f_n t) + \cos(\frac{2\pi n}{L}x + 2\pi f_n t)\right] \tag{9}$$

Tämä voidaan trigonometristen funktioiden yhteenlaskusääntöjä käyttäen muokata muotoon

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\frac{2\pi n}{L}x - 2\pi f_n t) + \cos(\frac{2\pi n}{L}x + 2\pi f_n t)\right] = \cos(\frac{2\pi n}{L}x)\cos(2\pi f_n t). \tag{10}$$

Kun tätä sovelletaan alkuperäiseen Fourier-kehitelmäämme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{100} k_n \cos(\frac{2\pi n}{L}x), \tag{11}$$

saadaan

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=0}^{100} k_n \cos(\frac{2\pi n}{L}x)\cos(2\pi f_n t) && (12) \\ &= \sum_{n=0}^{100} [k_n \cos(2\pi f_n t)]\cos(\frac{2\pi n}{L}x) && (13) \\ &= \sum_{n=0}^{100} k_n(t)\cos(\frac{2\pi n}{L}x), && (14) \end{aligned}$$

jossa siis määriteltiin ajastariippuvat Fourier-kertoimet

$$k_n(t) = k_n \cos(2\pi f_n t). \tag{15}$$

Koodin rakenne: käänteis-cosinimuunnos

Käänteis-cosinimuunnos on helppo, sillä se on itse asiassa vain yo. cosinimuunnoksemme, eli

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{100} k_n(t)\cos(\frac{2\pi n}{L}x). \tag{16}$$

Tunnemme siis nyt oikean puolen kertoimet $k_n(t)$, joten saamme ratkaistua funktion $y(x,t)$.

Huomaa, että aikariippuvuus on ainoastaan kertoimissa $k_n(t)$, ei cos-funktioissa. Kyse on siitä, että cos-funktiot toimivat funktioavaruutemme kantafunktioina, emmekä halua funktioavaruutemme koordinaatiston olevan ajasta riippuva (yleensä).

Tehtävä 2: esitehtäväkysymykset

Käykää katsomassa kurssin zulip kanavalla
https://phys-a0140.zulip.cs.aalto.fi
'Kysymyksiä ja vastauksia esitehtävistä' opiskelijoiden esittämiä kysymyksiä ja niihin luennoitsijan kirjoittamia vastauksia. Etsikää muutama teitä kiinnostava kysymys ja keskustelkaa niistä: miksi se on kiinnostava? Oletteko vastauksen kanssa samaa mieltä tai eri mieltä?