MS-A0002 Matriisilaskenta (SCI)
MS-A0003 Matriisilaskenta (ELEC, ENG) Turunen
2.6.2021, 16:30–20:30

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Perustele ratkaisusi: pelkkä lopputulos ei riitä. Koetehtävät on ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Millä arvoilla $\lambda \in \mathbb{R}$ yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 6x_2 + \lambda x_3 = 24 \end{cases}$$

on ratkaisuja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
(a) yksi ainoa,
(b) äärettömän monta,
(c) nolla kappaletta?
Perustele!

2. Etsi jokin funktio $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

$$f(AB) = f(A)\,f(B), \quad f(\lambda A) = \lambda^2\,f(A), \quad f(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1$$

kaikilla $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tarkista laskemalla, että esittämäsi funktio f todellakin toteuttaa nämä ominaisuudet. (Vihje: Mieti determinanttia.)

3. Olkoon $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, missä $a + c = 1 = b + d$ ja $a, b, c, d > 0$.

(a) Näytä, että $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ on matriisin M ominaisvektori.
Mikä on tätä ominaisvektoria vastaava ominaisarvo?

(b) Näytä, että $a + d - 1$ on matriisin M ominaisarvo.
Mitkä ovat sitä vastaavat reaaliset ominaisvektorit?

(c) Diagonalisoi matriisi M.

4. Olkoon $N = U \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} U^* \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, missä $U = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

(a) Näytä, että matriisi N on normaali.

(b) Millä kaikilla arvoilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ matriisi N on symmetrinen
(jokaisella $\varphi \in \mathbb{R}$)? Perustele!