Aalto-yliopisto

MS-A0004 Matriisilaskenta

Laskuharjoitus 4 / vko 40

Tehtäviä 1–4 lasketaan alkuviikon harjoituksissa. Näistä tehtävät 1 ja 2 esittelet valmistuttuaan assistentille (merkitty kirjaimella L = Lasketaan), tehtävien 3 ja 4 ratkaisut palautat sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta pe 8.10. klo 17.00 mennessä (merkitty kirjaimella P = Palautetaan). Tehtäviä 5–8 lasketaan loppuviikon harjoituksissa: 5 ja 6 paikanpäällä, kun taas 7 ja 8 palautetaan sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta ti 12.10. klo 17.00 mennessä. Tarkemmat palautusohjeet löytyvät kurssin kotisivuilta.

Tehtävä 1 (L)**:** Oletetaan, että $AB = AC$, kun B ja C ovat $m \times n$-matriiseja.

a) Näytä, että jos A on kääntyvä, niin $B = C$.

b) Seuraako yhtälöstä $AB = AC$ yhtälö $B = C$, jos A ei olekaan kääntyvä? Perustele tai keksi vastaesimerkki.

Tehtävä 2 (L)**:** Millaisen matriisin saat, kun kerrot

a) diagonaalimatriisin toisella diagonaalimatriisilla?

b) yläkolmiomatriisin toisella yläkolmiomatriisilla?

c) alakolmiomatriisin toisella alakolmiomatriisilla?

Perustele vastauksesi.

Tehtävä 3 (P)**:** Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -9 & 5 & -2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Lisäämällä ensimmäinen rivi 3:lla kerrottuna toiseen riviin saadaan toisen rivin ensimmäinen alkio nollaksi. Tämä eliminaatioaskel voidaan esittää myös kertolaskulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -9 & 5 & -2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A kerrotaan siis *eliminaatiomatriisilla* E_{21} (tässä 21 tarkoittaa, että riviin 2 on lisätty rivi 1 jollain vakiolla kerrottuna, tässä tapauksessa vakiolla 3). Yleisesti jokainen rivioperaatio voidaan esittää eliminaatiomatriisina. Niitä joskus kutsutaan *alkeismatriiseiksi*: ne saadaan identiteettimatriisista yhdellä rivioperaatiolla.
Saattaaksesi matriisi A porrasmuotoon, tee sille vielä seuraavat askeleet:

i) Vähennä ensimmäinen rivi 2:lla kerrottuna kolmannesta rivistä

ii) Vähennä toinen rivi 2:llä kerrottuna kolmannesta rivistä.

Etsi näiden askelten eliminaatiomatriisit E_{31} ja E_{32} ja tarkista, että saamallesi porrasmuotoiselle matriisille U pätee $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$.

Tehtävä 4 (P)**:** Matriisin LU-hajotelmassa matriisi esitetään kahden matriisin tulona $A = LU$, missä matriisi L on alakolmiomatriisi ja U yläkolmiomatriisi. Käytännössä U on se porrasmuoto, johon matriisi saadaan Gaussin eliminaatioaskelilla, ja L sisältää informaation näistä askelista. Laske nyt tehtävän 3 matriisin A LU-hajotelma saamasi yhtälön $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$ avulla: matriisi U sinulla on jo valmiina, matriisin L saat laskettua eliminaatiomatriisien käänteismatriisien avulla. Tarkista, että $A = LU$.

Tehtävä 5 (L)**:** a) Osoita suoralla laskulla, että matriiseille

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

pätee $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b) Tason kierto origon ympäri kulman $\varphi \in \mathbb{R}$ verran voidaan esittää matriisina

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Vaikka lopputulos onkin geometrisesti ilmeinen (miksi?), laske $\det(A)$.

Tehtävä 6 (L)**:** Tarkastellaan neliömatrisia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua? Miksi?

a) Jos matriisin A kaksi riviä ovat samat, niin $\det(A) = 0$.

b) $\det(-A) = -\det(A)$.

c) Jos matriisi B saadaan matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\det(B) = \det(A)$.

d) $\det(2A^T) = 2^n \det(A)$.

e) Jos $\det(A) = 2$, niin $\det(A^3) = 6$.

f) Jos A on kääntyvä, niin $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

Tehtävä 7 (P)**:** Laske $\det(B)$, kun

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Millaista avaruuden muunnosta B esittää?

Vihje: Tehtävä 5(b) ja tulon determinanttikaava.

Tehtävä 8 (P)**:** Tarkista, että vektoreiden $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ vektoritulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ voidaan laskea determinanttina seuraavasti:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Laske tämän tiedon avulla sen suunnikkaan ala, jonka kärkipisteet ovat $(1, 4)$, $(-1, 5)$, $(3, 9)$ ja $(5, 8)$.