Aalto-yliopisto

MS-A0004/A0006 Matriisilaskenta

Laskuharjoitus 5 / vko 41

Tehtäviä 1–4 lasketaan alkuviikon harjoituksissa. Näistä tehtävät 1 ja 2 esittelet valmistuttuaan assistentille (merkitty kirjaimella L = Lasketaan), tehtävien 3 ja 4 ratkaisut palautat sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta pe 15.10. klo 17.00 mennessä (merkitty kirjaimella P = Palautetaan). Tehtäviä 5–8 lasketaan loppuviikon harjoituksissa: 5 ja 6 paikanpäällä, kun taas 7 ja 8 palautetaan sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta ti 19.10. klo 17.00 mennessä. Tarkemmat palautusohjeet löytyvät kurssin kotisivuilta.

Tehtävä 1 (L): a) Onko $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ matriisin $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ ominaisvektori? Jos on, mikä on sitä vastaava ominaisarvo?

b) Onko $\lambda = 3$ matriisin $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvo? Jos on, etsi sitä vastaava ominaisvektori.

Tehtävä 2 (L): Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja jotkin niitä vastaavat ominaisvektorit. Mitä nämä kertovat matriisin A esittämästä lineaarikuvauksesta?

Tehtävä 3 (P): Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja jotkin niitä vastaavat ominaisvektorit.

Tehtävä 4 (P): a) Osoita, että jos A on 2×2 matriisi, niin matriiseilla A ja A^T on samat ominaisarvot.

b) Anna kuitenkin esimerkki 2×2 matriisista A siten, että matriiseilla A ja A^T on eri ominaisvektorit (eli samaa ominaisarvoa vastaavat ominaissuorat ovat eri suoria)

Tehtävä 5 (L): Mitkä ovat matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut?

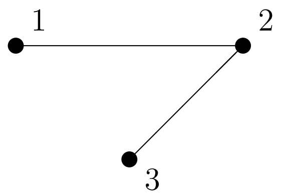
Tehtävä 6 (L): Osoita, että kolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.

Tehtävä 7 (P): Tarkastellaan kärjistä ja särmistä koostuvaa graafia, jonka kärjet on numeroitu kokonaisluvuin $1, \ldots, n$. Tällöin graafin *vierusmatriisi* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on matriisi, jonka alkio $a_{ij} = 1$, jos kärkien i ja j välillä on särmä, ja 0, jos ei ole. (Huomaa, että $a_{ii} = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.)

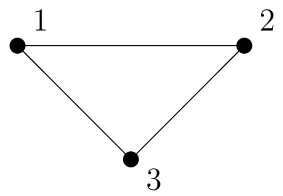
Olkoot λ_i, $i = 1, \ldots, n$, graafin vierusmatriisin A ominaisarvot. Tällöin $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ on graafin särmien lukumäärä ja $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3$ on graafin särmistä muodostuvien kolmioiden lukumäärä.

Tarkista näiden faktojen paikkansapitävyys oheisten yksinkertaisten graafien tapauksissa:

a)



b)



Tehtävä 8 (P): Alla on annettu matriisi M, joka on erään graafin vierusmatriisi. Tee jompi kumpi (tai molemmat) seuraavista:

i) Käyttäen apuna Matlabia tai jotain muuta matemaattista ohjelmistoa selvitä graafin särmien ja kolmioiden lukumäärät.

ii) Piirrä graafi ja laske siitä särmien ja kolmioiden lukumäärät.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$