Aalto-yliopisto

MS-A0007 Matriisilaskenta

Laskuharjoitus 6 / vko 42

Tehtäviä 1–4 lasketaan alkuviikon harjoituksissa. Näistä tehtävät 1 ja 2 esittelet valmistuttuaan assistentille (merkitty kirjaimella L = Lasketaan), tehtävien 3 ja 4 ratkaisut palautat sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta 22.10. klo 17.00 mennessä (merkitty kirjaimella P = Palautetaan). Tehtäviä 5–7 lasketaan paikanpäällä loppuviikon harjoituksissa. Tarkemmat palautusohjeet löytyvät kurssin kotisivuilta.

Tehtävä 1 (L)**:** Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Johda kaava A:n potensseille A^k, kun $k = 1, 2, \ldots$.

Tehtävä 2 (L)**:** Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

jos mahdollista.

Tehtävä 3 (P)**:** Niistä opiskelijoista, jotka ovat läsnä tietyllä matriisilaskennan luennolla, 80% saapuu myös seuraavalle luennolle. Niistä opiskelijoista, jotka ovat poissa tietyltä luennolta, seuraavalle luennolle tulee 30%.

a) Jos ensimmäisellä luennolla on paikalla 100 opiskelijaa 150 ilmoittautuneesta, montako on läsnä 12. luennolla?

b) Millä todennäköisyydellä kurssin opiskelija on läsnä satunnaisella luennolla? (Opiskelijoiden yhteismäärää ei nyt tiedetä, mutta kurssin voidaan olettaa jatkuvan (pienen) ikuisuuden.)

Vihje: Muodosta matriisi A kuvaamaan tätä ilmiötä ja laske esimerkiksi (a) kohdassa lukumäärä sopivalla potenssin A^k avulla. Kohdassa (b) kyse on rajankäynnistä ja esimerkki on samanlainen kuin sään ennustamisesimerkki luentoprujussa.

Tehtävä 4 (P)**:** Unitaarisesti diagonalisoi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vihje: Muista, että koska matriisi A on reaalinen ja symmetrinen, niin ominaisarvojen yleisestä teoriasta tiedetään, että sillä on täysi määrä lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, ja että niistä voidaan muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta valitsemalla pituuden 1 ominaisvektorit. Tällaisen kannan avulla voidaan muodostaa haluttu unitaarinen matriisi U kuten teimme luennolla.

Tehtävissä 5-7 lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

singulaariarvohajotelma $A = U\Sigma V^T$ ja käytetään sitä.

Tehtävä 5 (L)**:** Laske matriisin A singulaariarvot ja matriisin $A^T A$ ominaisvektorit saadaksesi matriisit Σ ja V.

Tehtävä 6 (L)**:** Laske edellisen tehtävän tulosten avulla vektorit matriisiin U ja kokoa tulokset singulaariarvohajotelmaksi $A = U\Sigma V^T$.

Tehtävä 7 (L)**:** Päättele A:n singulaariarvohajotelman avulla, minkä yksikkövektorin $\mathbf{x}$ kuvavektori $A\mathbf{x}$ on kaikkein pisin.

Tehtävä 8: Olet saanut (tai saat lähipäivinä) sähköpostitse henkilökohtaisen linkin kurssin palautekyselyyn. Vastaa tähän kyselyyn sen aukioloaikana. Kiinnitä erityistä huomiota avokysymysten vastauksiin, vapaamuotoinen, sanallinen palaute on kurssin kehittämisen kannalta kaikkein hyödyllisintä.

Kaikki, joiden henkilökohtaisella linkillä kyselyyn on vastattu, saavat 2 harjoituspistettä tämän tehtävän suorittamisesta. Vastanneiden listan näemme järjestelmästä ainoastaan erillään itse vastauksista.

Tällä viikolla ei ole verkkoharjoituksia ja ei ole loppuviikon (P) tehtäviä. Onnea kokeeseen!