

MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 12: Epähomogeeninen lineaarinen
differentiaaliyhtälö

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY I

Vakiokertoimisen tapauksen lisäksi myös DY:lle $y' + p(x)y = r(x)$ voidaan johtaa ratkaisukaava jopa epähomogeenisessa tapauksessa.

Oletetaan, että $p(x)$ ja $r(x)$ ovat jatkuvia jollakin välillä $x \in I$. Resepti menee näin:

- Valitaan jokin integraalifunktio $P(x) = \int p(x) dx$ ja kerrotaan yhtälö puolittain n.k. **integroivalla tekijällä** $e^{P(x)}$.
- Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$y'(x)e^{P(x)} + y(x)p(x)e^{P(x)} = r(x)e^{P(x)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(y(x)e^{P(x)} \right) = r(x)e^{P(x)}$$

koska: **integroiva** tekijä!

Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY II

- Integroimalla molemmat puolet saadaan

$$y(x)e^{P(x)} = \int r(x)e^{P(x)} dx + C.$$

- Näin saadaan yleinen ratkaisu

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)} dx,$$

ja erikoisratkaisut saadaan sovittamalla vakio C haluttuun alkuehtoon $y(x_0) = y_0$

Ratkaisukaavaa ei kannata opetella ulkoa; vain menetelmän idea!

Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY III

Huomioita edellä saadusta ratkaisukaavasta:

- Kaikkiin välivaiheisiin voi kirjoittaa \Leftrightarrow , joten ratkaisukaava antaa kaikki mahdolliset ratkaisut ja ne on määritelty välillä I .
- Integraalifunktiossa $P(x)$ ei tarvitse integroimisvakiota, koska se muuttaisi ainoastaan lopullisen ratkaisukaavan vakiota C .
- Vakio kertomisessa tapauksessa säätötekniikan insinöörille tärkeälle alkuarvotehtävälle

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) + bf(x), & x \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

saadaan ratkaisu n.k. **vakionvariointikaavalla**

$$y(x) = e^{ax}y_0 + \int_0^x e^{a(x-s)}bf(s)ds.$$

Esimerkki

Ratkaise DY $y' + p(x)y = 0$ separointimenetelmän avulla.

Ratkaisu: Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y_0(x) \equiv 0$. Muut ratkaisut eivät saa arvoa 0, joten niille pätee:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y' = -p(x)y \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} &= - \int p(x) dx + C_1 \\ \Leftrightarrow \ln |y| &= -P(x) + C_1 \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{C_1 - P(x)} \\ \Leftrightarrow y = y(x) &= \pm e^{C_1} e^{-P(x)} = C e^{-P(x)}.\end{aligned}$$

Tässä lauseke $\pm e^{C_1}$ on korvattu yksinkertaisemmalla vakiolla $C \in \mathbb{R}$ (triviaaliratkaisu \Rightarrow myös $C = 0$ käy).

Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY V

Esimerkki

Ratkaise DY $xy' - 2y = 2$ alkuehdolla a) $y(1) = 0$; b) $y(0) = 0$.

Ratkaisu: Muodosta $y' - (2/x)y = 2/x$ nähdään, että kyseessä on lineaarinen DY. Sen integroiva tekijä on

$$e^{-\int (2/x) dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln(1/x^2)} = \frac{1}{x^2}.$$

Tällä kertomalla päästään muotoon

$$(1/x^2)y'(x) - (2/x^3)y(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3},$$

joten $y(x) = x^2(-1/x^2 + C) = Cx^2 - 1$ on DY:n yleinen ratkaisu. Alkuehdosta $y(1) = 0$ saadaan $C = 1$, mutta alkuehdosta $y(0) = 0$ seuraa ristiriita $-1 = 0$. Ratkaisu on siis a-kohdassa $y(x) = x^2 - 1$, mutta b-kohdan alkuehdon toteuttavaa ratkaisua ei ole.

Lause

Epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

kun y_1 ja y_2 ovat vastaavan homogeenisen yhtälön perusratkaisut ja y_0 on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Yksittäisratkaisuksi kelpaa siis mikä tahansa yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ toteuttava funktio $y_0(x)$.

Perustelua taululla.

Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY II

Vakiokertoimiselle epähomogeeniselle yhtälölle

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

yksittäisratkaisu löydetään usein **yritteellä**, joka on muotoa " $r(x)$ yleisillä kertoimilla" tai joskus hieman hankalampi.

Taulukossa on annettu yritteen yleinen muoto vakiokertoimisille toisen kertaluvun yhtälöille, kun kuormatermi $r(x)$ on jokin alkeisfunktio. Tässä $P(\lambda)$ on vastaavan homogeenisen yhtälön karakteristinen polynomi.

$r(x)$ sisältää	yritteeseen tulee mukaan
n -asteisen polynomin	$A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ ($+A_{n+1}x^{n+1}$, jos $q = P(0) = 0$)
$\sin bx$, $\cos bx$	$A \cos bx + B \sin bx$, jos $P(ib) \neq 0$
$\sin bx$, $\cos bx$	$Ax \cos bx + Bx \sin bx$, jos $P(ib) = 0$
$e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$	$e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$, jos $P(a + ib) \neq 0$
e^{kx}	Ae^{kx} , jos $P(k) \neq 0$
e^{kx}	Axe^{kx} , jos $P(k) = 0$ ja $P'(k) \neq 0$
e^{kx}	Ax^2e^{kx} , jos $P(k) = P'(k) = 0$

Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY III

Esimerkki

Määritä DY:n $y'' + y' - 6y = r(x)$ yleinen ratkaisu, kun

a) $r(x) = 12e^{-x}$;

b) $r(x) = 20e^{2x}$.

Ratkaisu: Ratkaisemalla homogeeninen yhtälö, huomataan että ratkaisut ovat muotoa $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + y_0(x)$.

Sijoittamalla a-kohdassa yrite $y_0(x) = Ae^{-x}$ saadaan $(A - A - 6A)e^{-x} = 12e^{-x}$, joka toteutuu arvolla $A = -2$.

Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY IV

Sen sijaan b-kohdassa muotoa Be^{2x} oleva yrite ei toimi, koska se on osa vastaavan HY:n yleistä ratkaisua ja tuottaa pelkää nollaa DY:n vasemmalle puolelle sijoitettuna.

Oikea yrite on b-kohdassa muotoa $y_0(x) = Bxe^{2x}$. Sijoitus johtaa yhtälöön

$$(4B + 2B - 6B)xe^{2x} + (4B + B)e^{2x} = 20e^{2x},$$

joka toteutuu arvolla $B = 4$.

Näiden yritteiden ja parametrien avulla voidaan kirjoittaa DY:iden yleiset ratkaisut molemmissa tapauksissa.

Eulerin menetelmä I

- Tehtävänä on määrittää yhtälön $y' = f(x, y)$ ja alkuehdon $y(a) = y_0$ toteuttavan ratkaisun likiarvo pisteessä $x = b$.
- Käytännössä vastaavia likiarvoja täytyy laskea useissa välin $[a, b]$ pisteissä, joten niiden avulla voidaan myös hahmotella ratkaisun kuvaaja.
- Valitaan askelten lukumäärä n , joka määrää **askelpituuden** $h = \Delta x = (b - a)/n$.
- Määritellään välin $[a, b]$ tasaväliset jakopisteet $x_k = a + kh$, $0 \leq k \leq n$, jolloin $x_0 = a$ ja $x_n = b$.
- Jokaista jakopistettä vastaa tarkan ratkaisun approksimaatio $y_k \approx y(x_k)$, joista ainoastaan $y_0 = y(x_0) = y(a)$ tunnetaan.

Eulerin menetelmä II

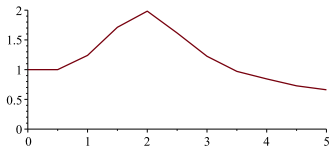
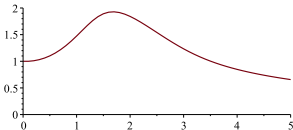
- Kuvion perusteella pisteestä (x_k, y_k) kannattaa edetä ratkaisukäyrän tangentin suuntaan, joten seuraava approksimaatio lasketaan edellisen avulla muodossa $y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) = y_k + hf(x_k, y_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.
- Tällöin siis $y_n \approx y(b)$ ja approksimaation tarkkuus näyttäisi paranevan jakovälien lukumäärän n kasvaessa. Eulerin menetelmä voidaan siis kiteyttää palautuskaavaan

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Eulerin menetelmä III

Eulerin menetelmä differentiaaliyhtälölle $y' = \sin(x \cdot y)$

```
> x[0] := 0 : y[0] := 1 : n := 50 : dx :=  $\frac{5.0}{n}$  : // askelpituus on siis 0,1
> for k from 0 to n-1 do
  x[k+1] := x[k] + dx
  y[k+1] := y[k] + dx * sin(x[k] * y[k])
od:
> plot([seq([x[k], y[k]], k=0..n)], view=[0..5, 0..2], scaling=constrained)
```



Vasemmalla askelpituus $h = \Delta x = 0,1$, oikealla $h = 0,5$.

Esimerkki

Ebola-viruksen leviämistä voidaan mallintaa rajoitetun kasvun mallilla $y' = ay(b - y)$, jota kutsutaan *logistiseksi yhtälöksi*. Tässä $y = y(t)$ on viruksen jo tartuttama väkimäärä hetkellä t .

Ratkaise logistinen yhtälö separointimenetelmällä vakioden arvoilla $a = b = 1$ ja alkuehdolla $y(0) = y_0 \in (0, 1)$. Hahmottele ratkaisun kuvaajaa.

Ratkaisu: Taululla.

Yleinen ratkaisu on

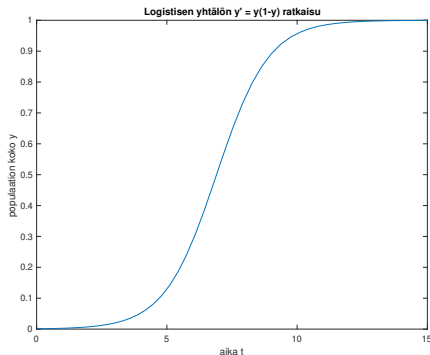
$$y(t) = \frac{Ce^t}{1 + Ce^t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

jossa alkuehto $y(0) = y_0$ toteutetaan asettamalla $C = \frac{y_0}{1-y_0}$.

Loppuesimerkki separoituvasta epälineaarisesta DY:stä II

Ratkaisun hahmottelu on “one-liner” MATLABilla käyttäen numeerista DY-ratkaisijaa `ode45()`, joka perustuu Runge–Kutta–Nyström-algoritmiin:

```
>> [t,y] = ode45(@(t,y) y*(1-y), [0 15], 0.001); plot(t,y)
```



Logistinen yhtälö ei ota huomioon Ebolan itämis- eikä tartuttavuusaikaa. Malli ei myöskään ota kantaa siihen, missä määrin kuolleet potilaat säilyvät tartuttavina.

Jos nämä huomioidaan, joudutaan kirjoittamaan paljon vaikeampi nk. differentiaali-viiveyhtälö tai jopa integro-differentiaaliyhtälö.

Monimutkaisemmista epidemiologista differentiaaliyhtälömalleista löytyy runsaasti tietoa internetistä. Hae esimerkiksi “**SIR model**” Wikipediasta.

Toivotan kurssin henkilökunnan ja omasta puolestani parasta menestystä tulevilla opinnoillanne ja muutenkin.