Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3
MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Yleinen tentti 8.9.2021

Laske kaikki kuusi tehtävää.

1. Origokeskisen R-säteisen pallon $B(R)$ lämpötila laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden funktiona keskipisteen arvosta 100 pinnan arvoon 0 muodossa

$$T = T(r) = 100(1 - r^2/R^2),\ 0 \le r \le R.$$

Laske pallon keskilämpötila

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_{B(R)} T\, dV.$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, kun $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
a) Osoita, ettei vektorikentällä $\mathbf{F}$ ole skalaaripotentiaalia.
b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ viivaintegraali pitkin umpinaista käyrää C, joka
(i) kulkee ensin pisteestä $(1, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 0, 2\pi)$ pitkin ruuviviivaa (Helix-käyrä) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$,
(ii) palaa sitten pisteestä $(1, 0, 2\pi)$ suoraan alas pisteeseen $(1, 0, 0)$.

3. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2, -1)$, $(3, -1)$, $(6, 3)$ ja $(1, 3)$. Päättele symmetrian perusteella suunnikkaan D keskiön koordinaatit ja laske sen jälkeen Greenin kaavan avulla viivaintegraali

$$\oint_{\partial D} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right) dx + 2x^2ye^{y^2}\, dy.$$

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo pinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (yksikköpallo) läpi, kun positiivinen suunta on ulospäin.

5. Olkoot $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarikenttiä.
a) Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

$$\nabla \times (f\nabla g + g\nabla f) = \overline{0}.$$

b) Olkoon lisäksi $\Delta f = \Delta g = 0$. Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että

$$\nabla \cdot (f\nabla g + g\nabla f) = 0.$$

Käännä!

6. Olkoot $R > r$ vakioita. Torus on (auton sisärenkaan tai munkkirinkilän muotoinen) pinta, joka syntyy r-säteisen ympyrän keskipisteen kiertäessä R-säteisen ympyrän kehän; vrt. kuvio. Toruksella on parametrisointi

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$

kun $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$.
(i) Osoita, että vektorit $\mathbf{r}_u$ ja $\mathbf{r}_v$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
(ii) Päättele edellisen kohdan avulla, että parametrisoinnin pinta-alan suurennussuhde on $h_u h_v = r(R + r\cos u)$.
(iii) Osoita, että toruksen pinta-ala on muotoa $2\pi r \cdot 2\pi R$. (Erikoistapaus Pappuksen lauseesta)