Kurssitentti 27.10.2021

Ratkaisut

Tehtävä 1

a) Lasketaan raja-arvot ($3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$):

> $limit\left(\dfrac{3^{2 \cdot n+1}}{9^n+1}, n = \text{infinity}\right)$

$$3 \tag{1.1}$$

> $limit\left(\dfrac{9 \cdot n^2 + 5\,n}{3 \cdot n^2 + 1}, n = \text{infinity}\right)$

$$3 \tag{1.2}$$

Raja-arvot lasketaan supistamalla osoittajan ja nimittäjän johtavat termit. Koska ylä- ja alarajoilla saadaan sama raja-arvo, niin suppiloperiaatteen nojalla jono (b_n) suppenee kohti raja-arvoa 3.

b) Raja-arvo on muotoa "0/0" ja se voidaan laskea käyttämällä L'Hospitalin sääntöä yhden kerran:

> $limit\left(\dfrac{\sin(\text{Pi} \cdot \sin(x))}{2 \cdot x - \text{Pi}}, x = \dfrac{\text{Pi}}{2}\right)$

$$0 \tag{1.3}$$

Tehtävä 2

a) Kyseessä on geometrinen sarja, jonka summa voidaan laskea erottamalla osoittajasta kerroin 2^3 ja nimittäjästä kerroin 4^5 ja käyttämällä yleistä summakaavaa, jossa $a = \dfrac{2^3}{4^5}$ ja $q = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Voi käyttää myös suoraan kaavaa $\dfrac{1.\ termi}{1-q}$.

> $sum\left(\dfrac{2^{k+3}}{4^{k+5}}, k = 0 \,..\, \text{infinity}\right)$

$$\frac{1}{64} \tag{2.1}$$

b) Suhdetestin mukaan peräkkäisten termien suhteen raja-arvo on 1/5 < 1, joten sarja suppenee.

c) Tässä $s_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, $joten$ 0<$s_k < \dfrac{2}{k^2}$ ja sarja suppenee majoranttiperiaatteen
nojalla. Summan voi itse asiassa laskea osamurtohajotelman avulla, jolloin saadaan teleskooppisarja:

> $sum\left(\dfrac{2}{k \cdot (k+1)}, k = 1 \,..\, \text{infinity}\right)$

$$2 \tag{2.2}$$

Tehtävä 3

> $f := y \rightarrow 2 \cdot y + \sin(y)$

$$f := y \mapsto 2 \cdot y + \sin(y) \quad \textbf{(3.1)}$$

> $f'(y)$

$$2 + \cos(y) \quad \textbf{(3.2)}$$

Tämä on $\geq 2 - 1 = 1 > 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, joten f on aidosti kasvava koko reaaliarselilla. (Jatkuvuuden perusteella) funktio f saa kaikki reaalilukuarvot, joten sillä on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Käänteisfunktion avulla saadaan siis $y = g(x)$ yksikäsitteisellä tavalla.

b) Selvästi $f(\pi) = 2\,\pi$, joten $g(2\,\pi) = f^{-1}(2\,\pi) = \pi$. Käänteisfunktion derivaattakaavan perusteella $g'(2\,\pi) = \left(f^{-1}\right)'(2\,\pi) = \dfrac{.1}{f'\left(f^{-1}(\pi)\right)} = \dfrac{1}{g'(\pi)} = \dfrac{1}{2 + \cos(\pi)} = 1.$

Tehtävä 4

> $Int\left(\ln(x)^2, x = 0..1\right) = int\left(\ln(x)^2, x = 0..1\right)$

$$\int_0^1 \ln(x)^2 \, dx = 2 \quad \textbf{(4.1)}$$

Tehtävä 5

a) Differentiaaliyhtälön ratkaisu on

> $y := t \rightarrow 10000 \cdot \exp(-k \cdot t)$

$$y := t \mapsto 10000 \cdot e^{-k \cdot t} \quad \textbf{(5.1)}$$

> $k := solve(y(12) = 2500)$

$$k := \frac{\ln(2)}{6} \quad \textbf{(5.2)}$$

b) Yhtälö on separoituva ja ratkeaa standardimenetelmällä joko suoraan tai yleisen ratkaisun kautta:

> $restart$

> $dsolve\left(\{y'(x) = -y(x)^2, y(0) = 10\}, y(x)\right)$

$$y(x) = \frac{10}{1 + 10\,x} \quad \textbf{(5.3)}$$

Tehtävä 6

a) Ratkaisu saadaan yleisen teorian mukaan muodossa "homogeenisen yleinen ratkaisu + yritteen avulla
saatu yksittäisratkaisu". Yritteessä käytetään muotoa $A x + B$.

> $DY := y''(x) - 8 \cdot y'(x) + 12 \cdot y(x) = 36 \cdot x + 24$

$$DY := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 8\, \frac{d}{dx}\, y(x) + 12\, y(x) = 36\, x + 24 \quad \textbf{(6.1)}$$

> $dsolve(DY)$

$$y(x) = e^{6\,x}\,\_C2 + e^{2\,x}\,\_C1 + 3\,x + 4 \quad \textbf{(6.2)}$$

b) Yleinen ratkaisu on muotoa $y(x) = C_1 x + C_2 \cos(x)$, jolloin $y'(x) = C_1 - C_2 \sin(x)$. Alkuehdoista saadaan
$100 = y(0) = C_2$, $200 = y'(0) = C_1$. Ratkaisu on siis $y(x) = 200\,x + 100\,\cos(x)$.

Huom: Tällaiset perusratkaisut ovat alkuarvotehtävien kannalta kaikkein kätevimpiä. Yleensä vaaditaan
$y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ ja $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, eli indeksit ovat toisinpäin tähän tehtävään verrattuna.