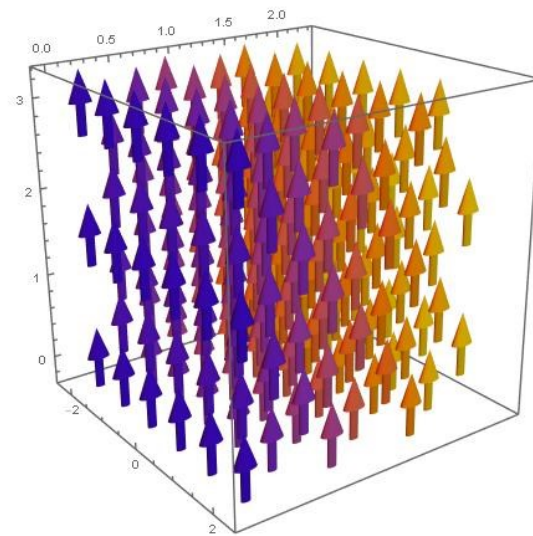


Kenttäteoria

Viikko 9: Tasoaallot
häviöllisessä väliaineessa, virran
ahtautuminen ja pyörrevirrat



Yliopistonlehtori
Jari Holopainen



Viikon tiivistelmä

Tällä viikolla jatketaan tasoaaltojen opiskelua. Erona viime viikkoon on se, että nyt huomioidaan väliaineen sähkönjohtavuus. Dielektrisen aineen suhteellinen permittivisyys voidaan kirjoittaa kompleksilukuna $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 - j \sigma / \omega$, jossa σ on väliaineen (efektiivinen) johtavuus (yksikkö S/m). Johtavuudella mallinnetaan väliaineen häviöitä. Häviöt aiheutuvat siis eristeen huonosta sähkön johtavuudesta tai siitä, että eristeen molekyylit värähtelevät sähkökentän vaikutuksesta aiheuttaen kitkaa. Hyvä esimerkki edellisestä olisi suolainen merivesi radioaaltotaajuuksilla (huono sähkön johde) ja jälkimmäisestä koaksiaalikaapelin väliaine tai piirilevyn substraatti (molekyylit pyörivät muuttuvan sähkökentän tahdissa ja se aiheuttaa kitkaa eli resistiivisiä häviöitä). Kompleksinen permittivisyys johtaa siihen, että myös etenemiskerroin k on kompleksiluku: $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = k_r - j k_i$. Aallon etenemissuuntainen paikkariippuvuus voidaan esittää muodossa $e^{-jkz} = e^{-k_i z} e^{-jk_r z}$, joka on eksponentiaalisesti vaimeneva aalto. Viikon aikana tutustutaan myös *virran ahtautumiseen*, joka tarkoittaa sitä, että vaihtovirta kulkee pääasiassa johteen pinnalla, ja *pyörrevirtoihin* (virrantiheyden roottori!), jotka aiheuttavat haitallisia häviöitä esimerkiksi muuntajissa. Pyörrevirtoja puolestaan hyödynnetään esimerkiksi metallinpaljastimessa, induktioliesissä ja -jarruissa. Tämä viikko esittelee useita upeita luonnonilmiöitä ja tekniikan sovelluksia!

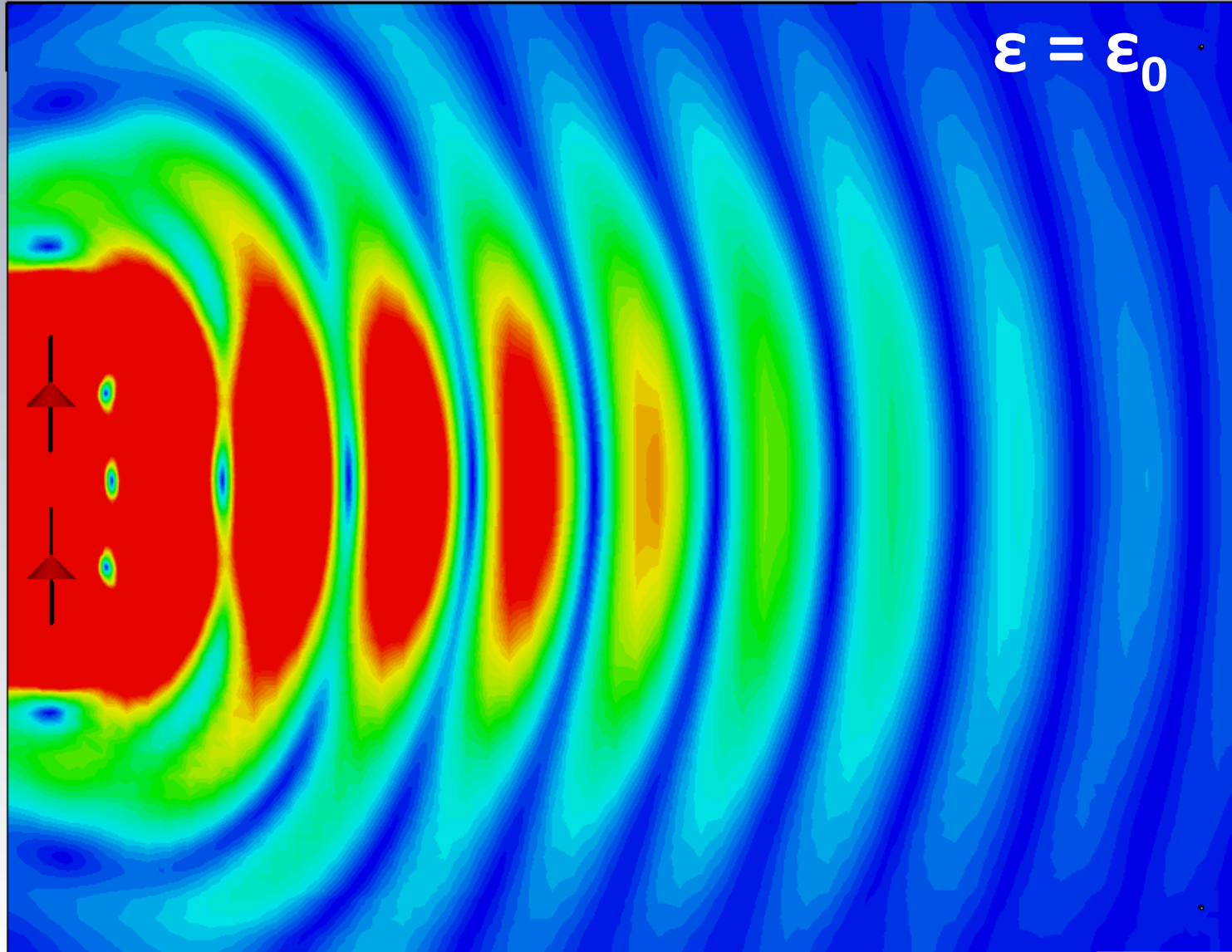
Tämän viikon oppimistavoitteet ja sisältö

- Opiskelija osaa **mallintaa** tasoaallot aikaharmonisilla kompleksivektoreilla ja **ratkaista** etenemis-, vaimenemis-, heijastus- ja läpäisytehtäviä erilaisissa polarisaatiotilanteissa aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden avulla.
- Opiskelija osaa **selittää** magneettikentän ja pyörrevirtojen syntymisen.
- Tasoaaltojen (viime viikon) kertausta
- Kompleksinen permittiivisyys
- Tasoaaltoratkaisu häviöllisessä väliaineessa, tunkeutumissyvyys
- Ampèren laki metallissa
- Pyörrevirrat, diffuusioyhtälö
- Virran ahtautuminen metallissa, tunkeutumissyvyys

} t_i
} k_e

Nämä luentokalvot ja luentomuistiinpanot eivät ole suunniteltu itseopiskeluun. Itseopiskeluun käy parhaiten oppikirjan 2. dynaamiset kentät luvut 2.2 ja 1.3

Tasoaalto vai palloaalto?



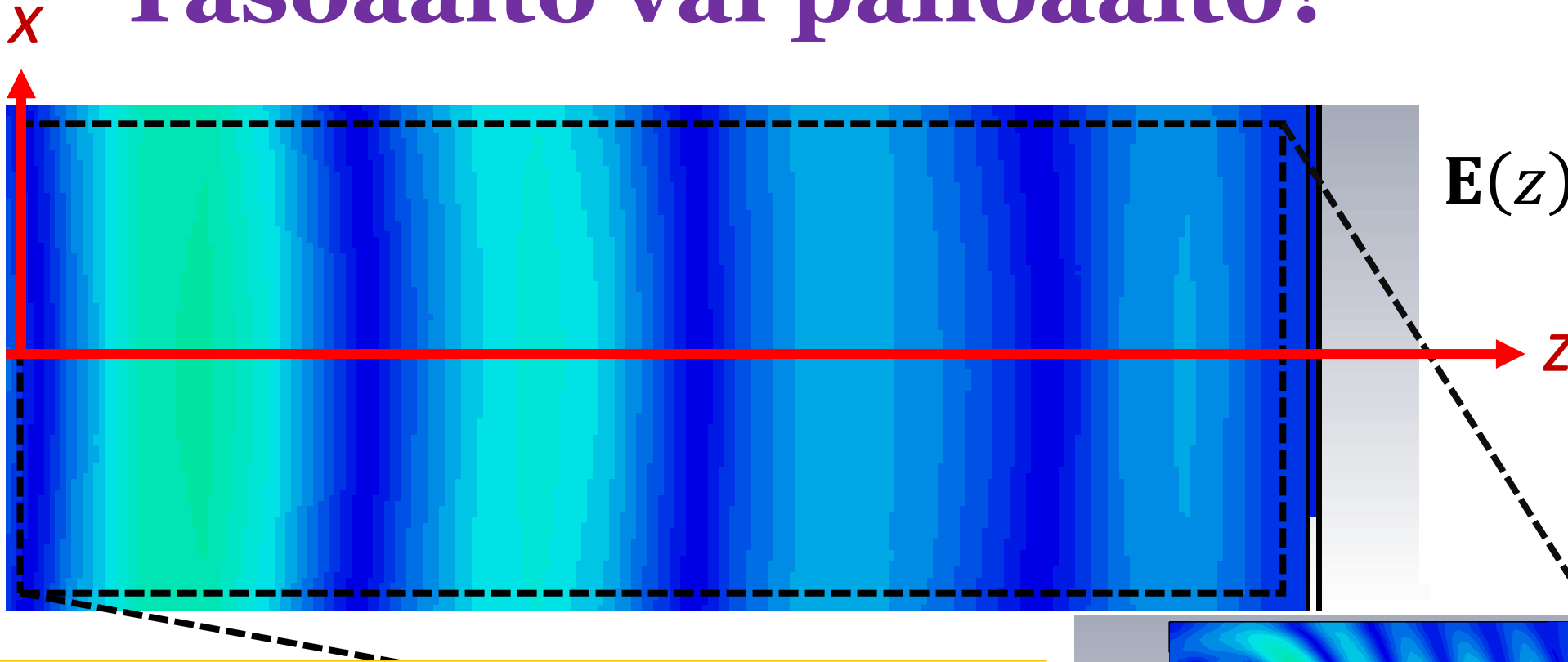
Kaksi
dipoli-
antennia,
jotka
lähettävät
radio-
aaltoja
samassa
vaiheessa

Animaatio:
sähkökentän
voimakkuus (V/m)
yli 50 V/m
alle 5 V/m

Mitä huomioita
animaatiosta
voidaan tehdä?

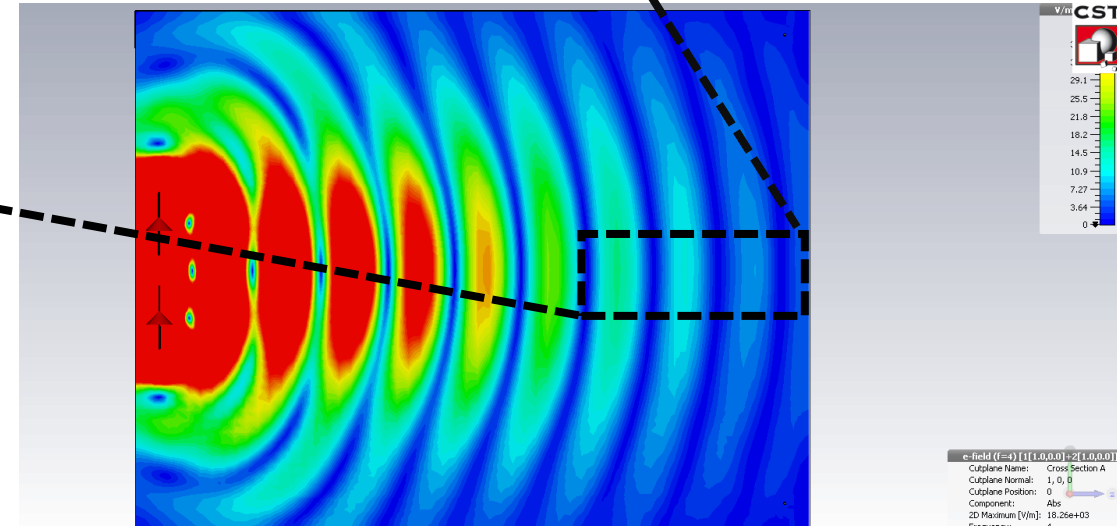
Milloin/missä
tasoaalto-olettamus
on voimassa?

Tasoaalto vai palloaalto?



Milloin todellista aaltoa (palloaalto!) voidaan pitää tasoaaltona?

- pienellä alueella
 - riittävän kaukana
- } esim. matkapuhelin tukiaseman kentässä



Mikä seuraavista vaihtoehtoista on tyhjiössä etenevän tasoaallon, jonka sähkökentän voimakkuus on $\mathbf{E}(z) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-jkz}$, magneettikentän voimakkuus? $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ on tyhjiön aaltoimpedanssi ja $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ on aaltoluku.

+ z etenemis-suunta
 $\bar{u}_z$ etenee aalto

2%. a. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_x \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

73%. **b.** $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_y \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

17%. c. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_z \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

0%. d. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_x \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

7%. e. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_y \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

0%. f. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_z \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\bar{u}_z = \bar{u}_x \times \bar{u}_y$$

$$[\bar{S}] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

$\bar{S}$ antaa energian etenemissuunnan

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-jkz} \frac{E_0^*}{\eta_0} e^{+jkz} \right\}$$

$$e^{-jkz} \cdot e^{+jkz} = 1$$

Mikä seuraavista vaihtoehtoista on tyhjiössä etenevän tasoaallon, jonka sähkökentän voimakkuus on $\mathbf{E}(z) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-jkz}$, magneettikentän voimakkuus? $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ on tyhjiön aaltoimpedanssi ja $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ on aaltoluku.

a. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_x \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

b. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_y \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

c. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_z \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jkz}$

d. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_x \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

e. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_y \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

f. $\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_z \frac{E_0}{\eta_0} e^{+jkz}$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{u}_x E_0 e^{-jkz} \times \bar{u}_y \frac{E_0^*}{\eta_0} e^{+jkz} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{\bar{u}_x \times \bar{u}_y}_{\bar{u}_z} \frac{E_0 E_0^*}{\eta_0} \underbrace{e^{-jkz} \cdot e^{+jkz}}_1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{u}_z \frac{|E_0|^2}{\eta_0} = \bar{u}_z \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \leftarrow \text{reaalinen, energia etenee } +\bar{u}_z\text{-suunnan}$$

Mikä seuraavista vaihtoehtoista on tyhjiössä etenevän tasoaallon, jonka aikaharmoninen sähkökentän voimakkuus on $\mathbf{E}(z) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-jkz}$, todellinen ajasta riippuva esitysmuoto? E_0 on reaalinen vakio (yksikkö V/m)

7%. a. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-j(kz - \omega t)}$

5%. b. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-j(kz + \omega t)}$

10%. c. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \cos(kz)$

0%. d. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \sin(kz)$

76%. e. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$

0%. f. $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \sin(\omega t - kz)$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}(z, t) &= \operatorname{Re} \{ \bar{\mathbf{E}}(z) e^{j\omega t} \} \\ &= \operatorname{Re} \{ \bar{\mathbf{u}}_x E_0 e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t} \} \\ &= \bar{\mathbf{u}}_x E_0 \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega t - kz)} \} \\ &= \bar{\mathbf{u}}_x E_0 \cos(\omega t - kz)\end{aligned}$$

Eulerin kaava

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

Ajasta riippuva kenttä

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$$

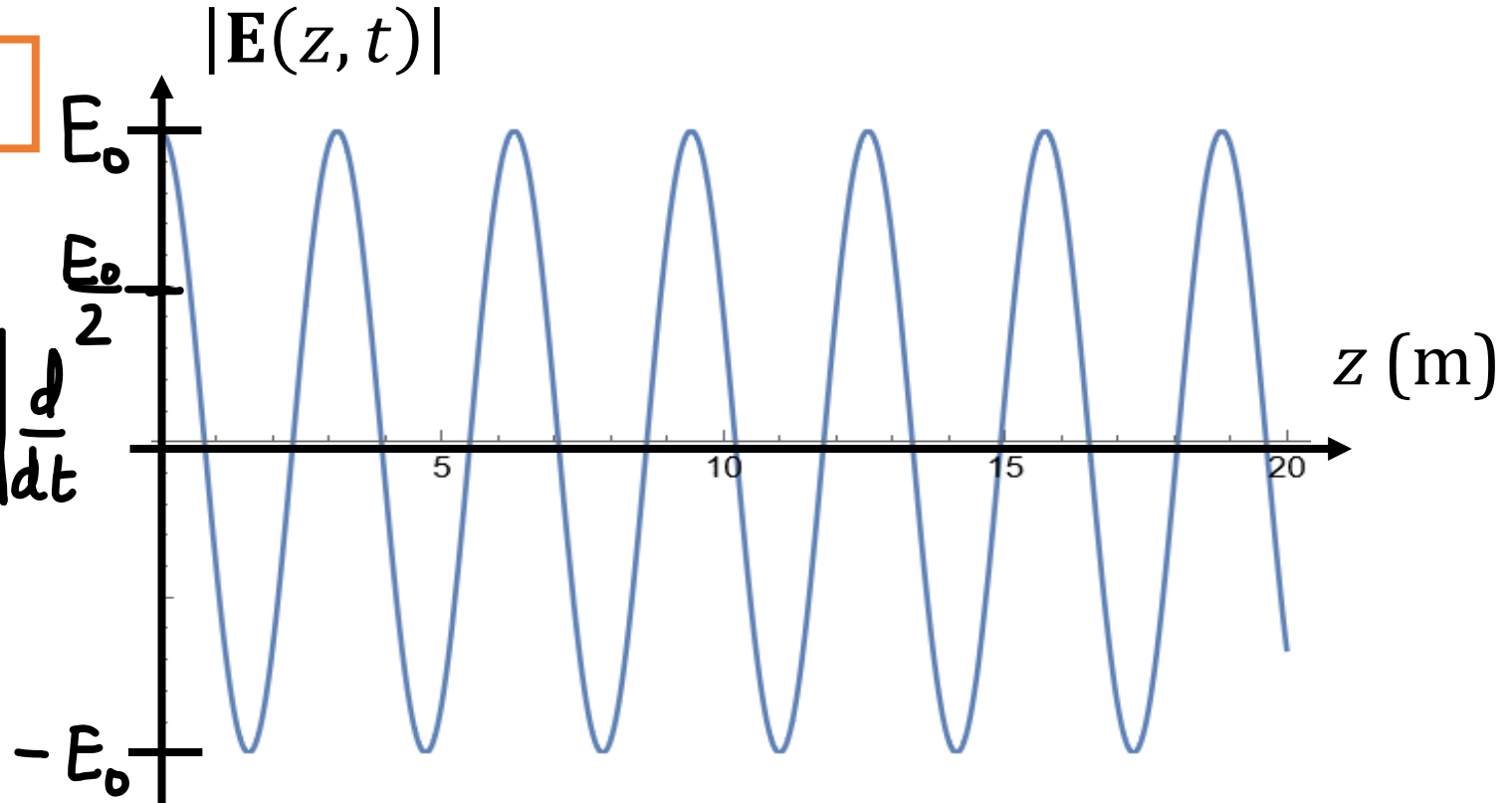
$$E_0 \cos(\omega t - kz) = \frac{E_0}{2}$$

$$\omega t - kz = \text{vakio} \quad \left(= \frac{\pi}{3} \right) \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz) = 0$$

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\omega - kv = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \text{valon nopeus tyhjiössä}$$



Ajasta riippuva kenttä

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$$

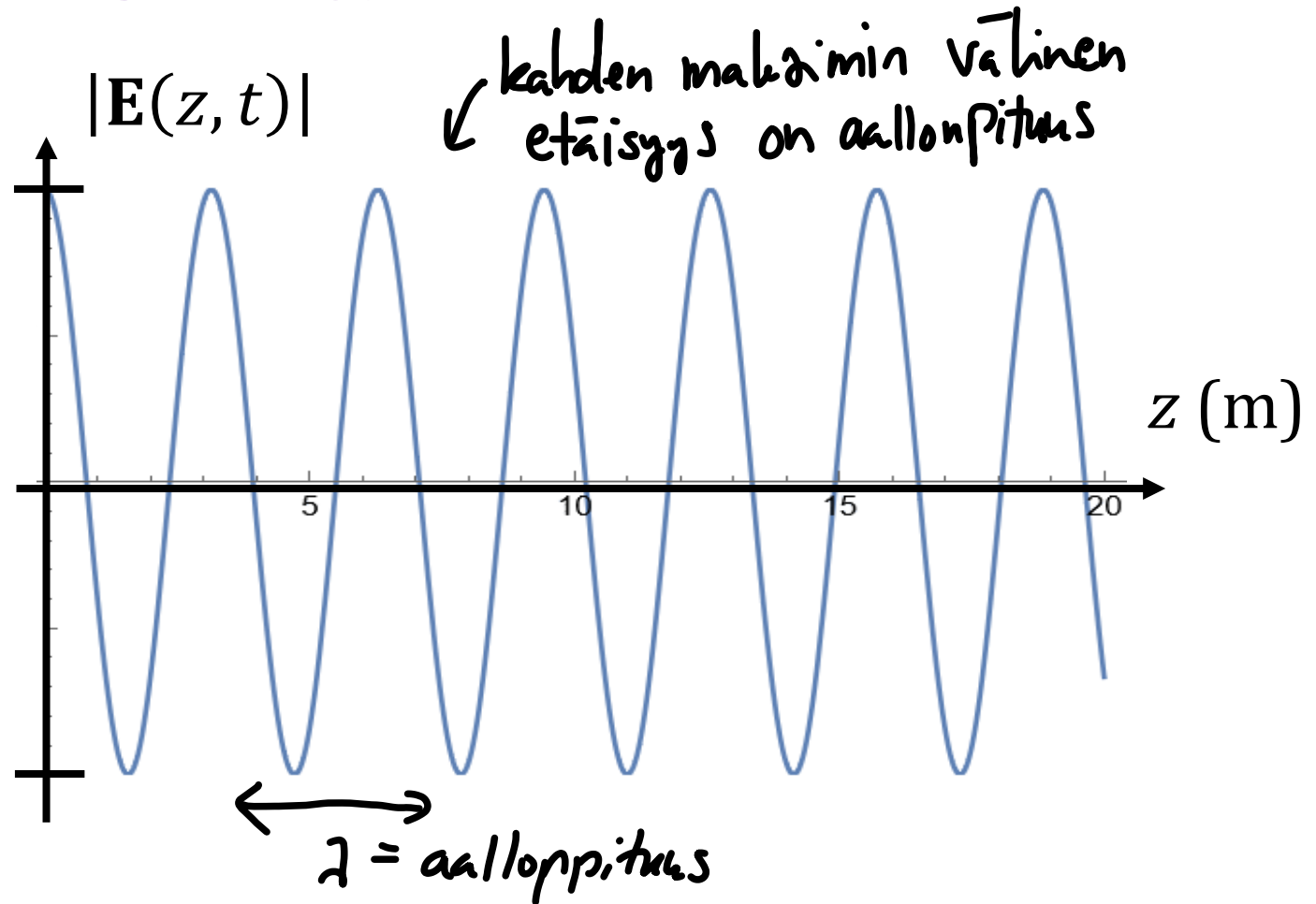
yhden aallonpituuden
matkalla vaihe muuttuu 2π

$$[\cancel{\omega t} - \cancel{kz}] - [\cancel{\omega t} - k(\cancel{z} + \lambda)] = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{tai} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c \quad \leftarrow \text{tuttu kaava}$$



Kompleksinen permittiivisyys

Ampèren laki: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$ || $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$ Ohmin laki

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}} = j\omega \left(\frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon \right) \bar{\mathbf{E}} \quad || \frac{1}{j} = -j$$

$$= j\omega\epsilon_0 \underbrace{\left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right)}_{\text{suhteellinen permittiivisyys on kompleksiluku}} \bar{\mathbf{E}} \quad \text{vrt. } \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_r\epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right)$$

↑
kuvaa molekyylin
polarisoitumista

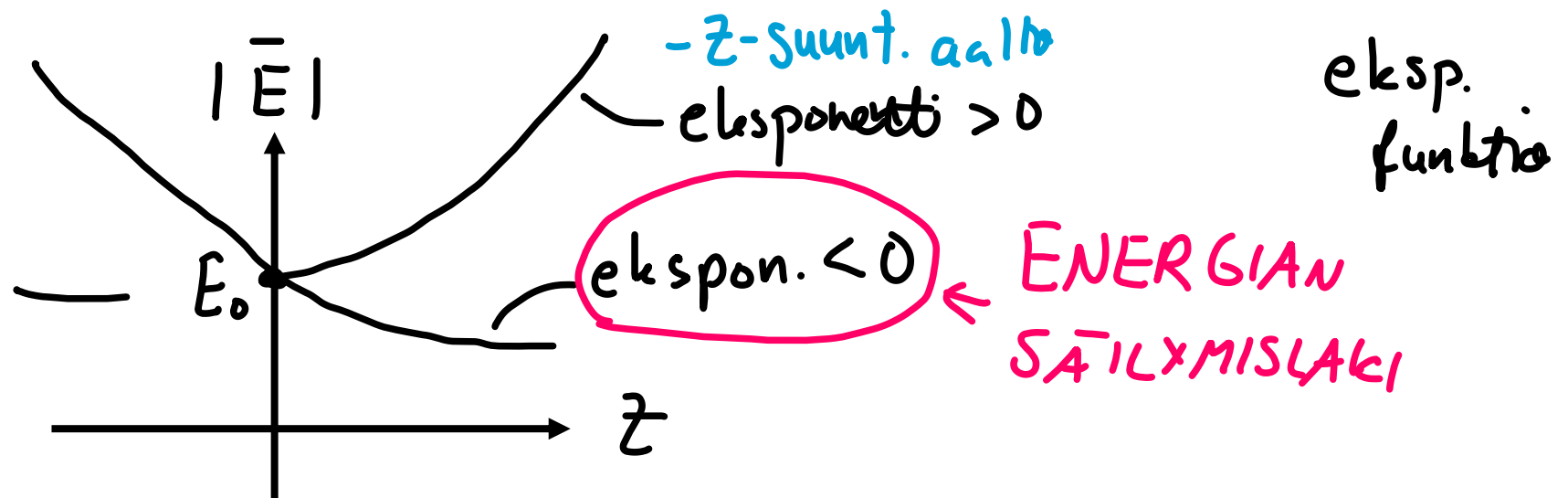
↑
kuvaa väliaineen johtavuuden vaikutusta

z-akselin suuntaan kulkeva tasoaaltoratkaisu

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u} E_0 e^{-jkz} \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \mu_0} = k_r \pm j k_i \quad j \cdot j = -1$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{u}} E_0 e^{-j(k_r \pm j k_i)z} = \bar{\mathbf{u}} E_0 e^{-jk_r z} \cdot e^{-j(\pm j k_i)z} = \bar{\mathbf{u}} E_0 e^{-jk_r z} \underbrace{e^{\pm k_i z}}_{\text{eksp. funktio}}$$



z-akselin suuntaan kulkeva tasoaaltoratkaisu

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 (\epsilon_r - j \sigma / \epsilon_0 \omega) \mu_0}$$

= kompleksinen etenemiskerroin (1/m)

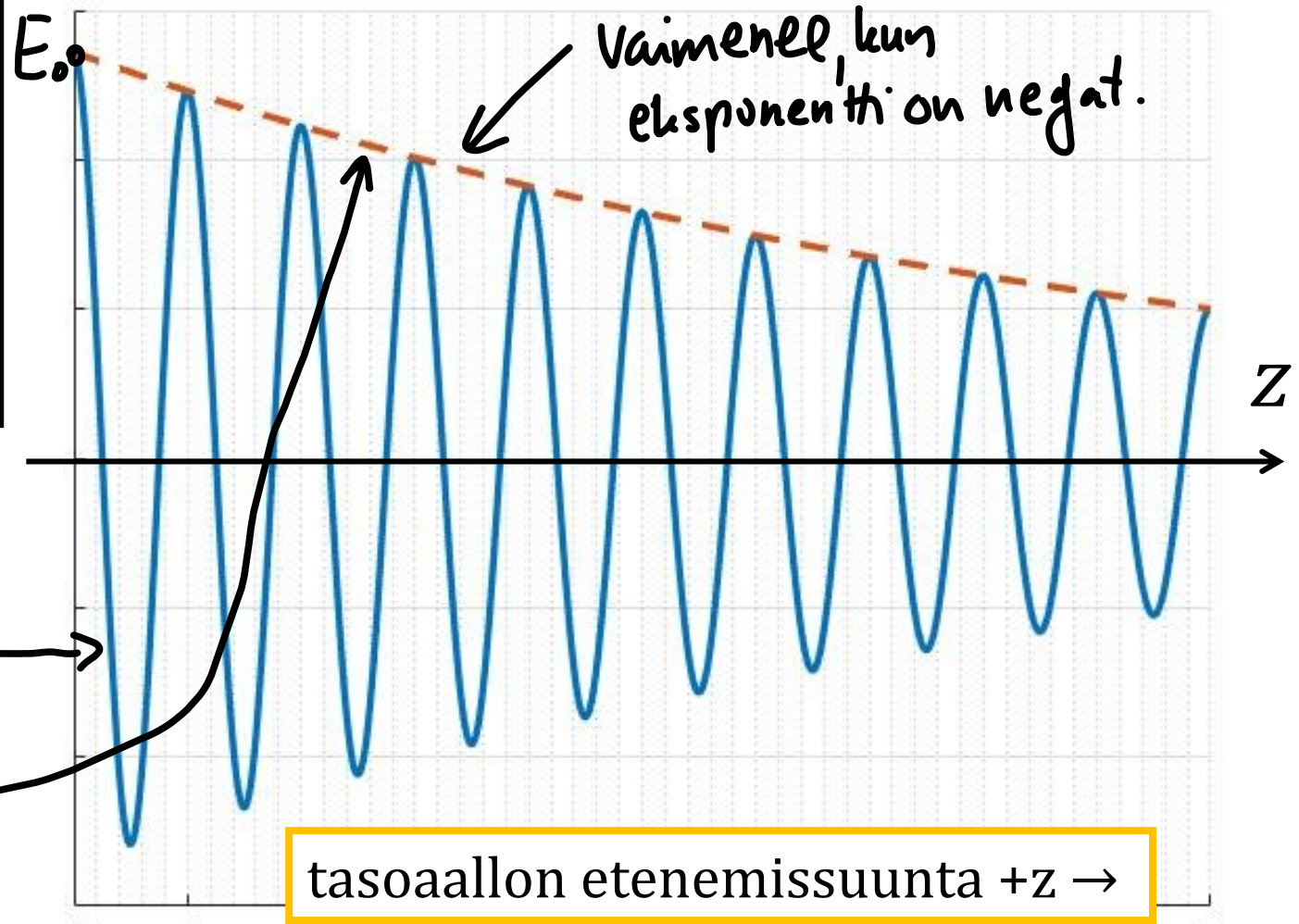
$$= k_r \pm j k_i \quad (k_r \text{ ja } k_i \text{ reaalisia})$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u} E_0 e^{-jkz} = \mathbf{u} E_0 e^{\pm k_i z} e^{-jk_r z}$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(z) e^{j\omega t}\}$$

$$\bar{E}(z, t) = \bar{u} \bar{E}_0 e^{\pm k_i z} \cos(\omega t - k_r z)$$

verhokäyrä



$|\mathbf{E}(z, t)|$

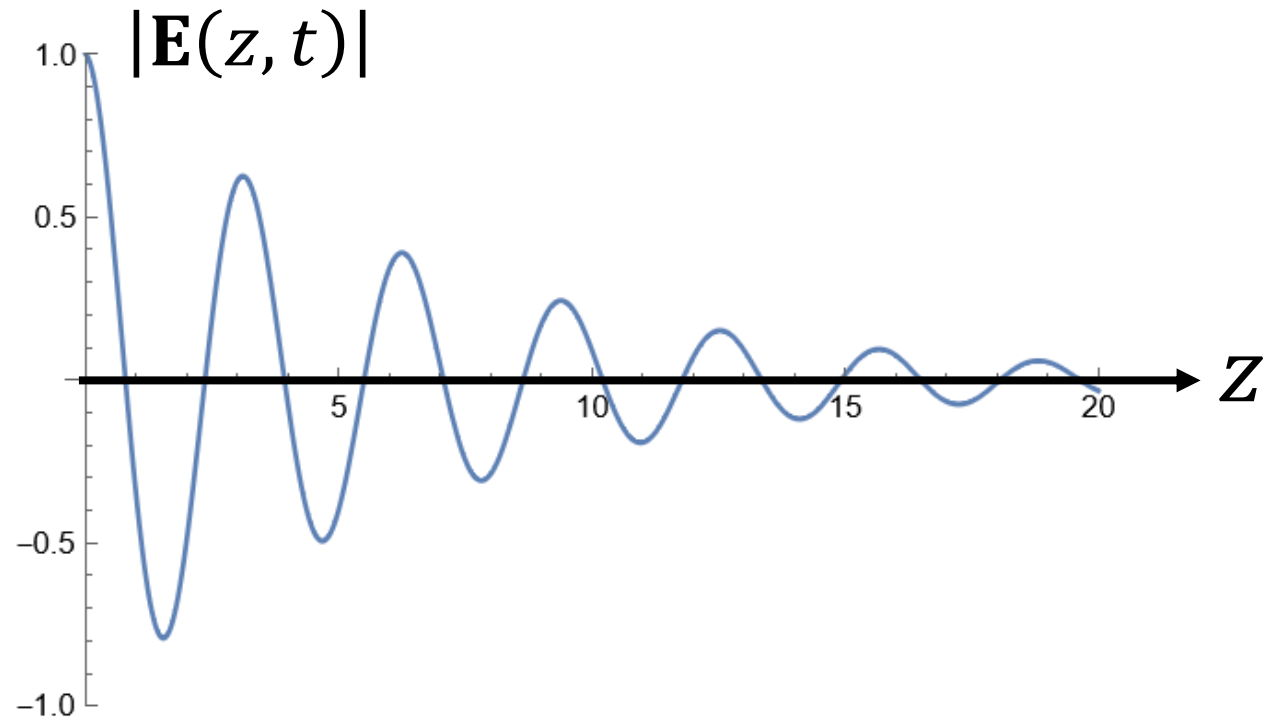
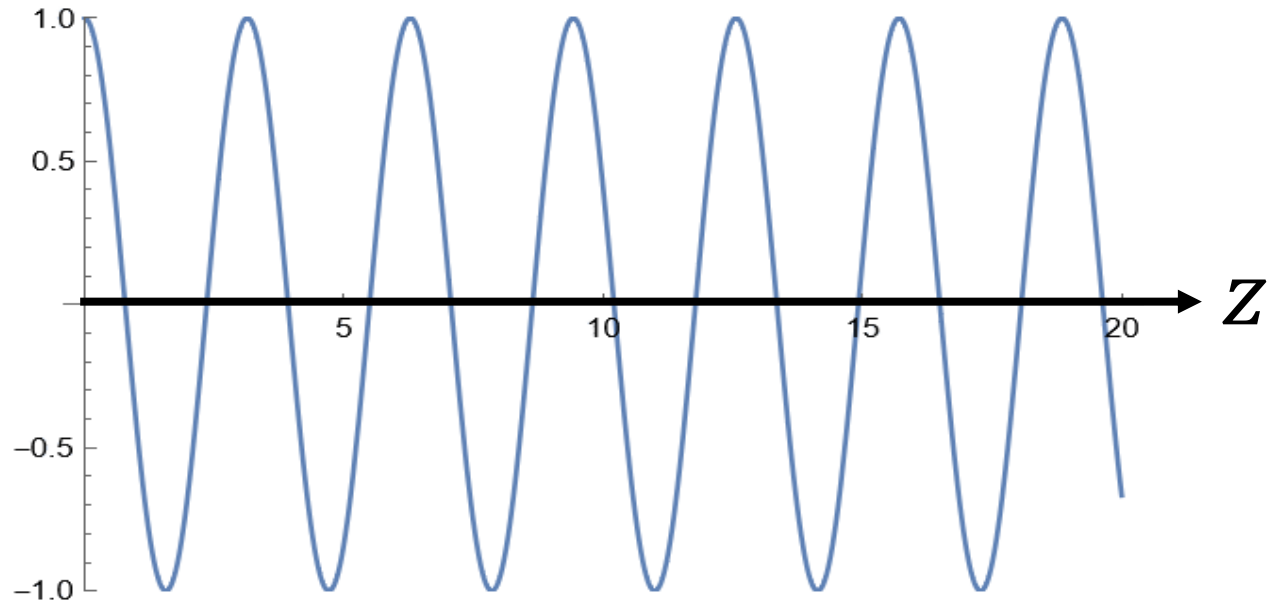
häviötön väliaine

$$k_r = 2 \frac{1}{\text{m}}; k_i = 0$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u} E_0 e^{-k_i z} * \cos(\omega t - k_r z)$$

häviöllinen väliaine

$$k_r = 2 \frac{1}{\text{m}}; k_i = 0,15 \frac{1}{\text{m}}$$



Esimerkki: Tarkastellaan radioaaltojen etenemistä merivedessä. Aihe on kiinnostava esimerkiksi sukellusveneiden merenalaisten yhteyksien takia. Meriveden sähköiset parametrit ovat radiotaajuuksilla suhteellinen (reaalinen) permittiivisyys $\epsilon_r = 81$ ja sähköjohtavuus $\sigma = 4,0 \text{ S/m}$. Laske kompleksinen permittiivisyys taajuuksilla a) $f = 10 \text{ kHz}$ ja b) $f = 1,0 \text{ GHz}$.

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \rightarrow \frac{\frac{\text{S}}{\text{m}}}{\frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = \frac{\frac{\text{A}}{\text{V}}}{\frac{\text{A}}{\text{V}}} = \text{yksikötön}$$

↑
yksikötön

yks

$$\epsilon(f = 10 \text{ kHz}) = \epsilon_0 \left(81 - \frac{4,0 \frac{\text{S}}{\text{m}}}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \right) = \epsilon_0 (81 - j 7,2 \cdot 10^6)$$

$$\epsilon(f = 16 \text{ Hz}) = \epsilon_0 (81 - j 72)$$

Esimerkki: Tarkastellaan radioaaltojen etenemistä merivedessä. Aihe on kiinnostava esimerkiksi sukellusveneiden merenalaisten yhteyksien takia. Meriveden sähköiset parametrit ovat radiotaajuuksilla suhteellinen (reaalinen) permittiivisyys $\epsilon_r = 81$ ja sähköjohtavuus $\sigma = 4,0 \text{ S/m}$. Laske kompleksinen aaltoluku taajuuksilla a) $f = 10 \text{ kHz}$ ja b) $f = 1,0 \text{ GHz}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } k &= \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{(81 - j 7,2 \cdot 10^6) \epsilon_0 \mu_0} = \\ &= 0,40 - j 0,4 \frac{1}{\text{m}} = k_r - j k_i \quad k_i = 0,40 \frac{1}{\text{m}} = k_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } k &= \underbrace{204}_{k_r} - j \overbrace{77,5}^{k_i} \frac{1}{\text{m}} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k_r} = \frac{2\pi}{204 \frac{1}{\text{m}}} = 0,031 \text{ m} = 3,1 \text{ cm} \end{aligned}$$

$\swarrow$ vrt. $\lambda_0 = 30 \text{ cm}$
 Vapaassa tilassa!
 Vedessä

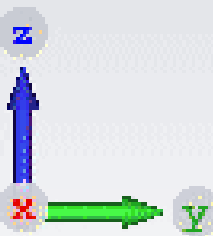
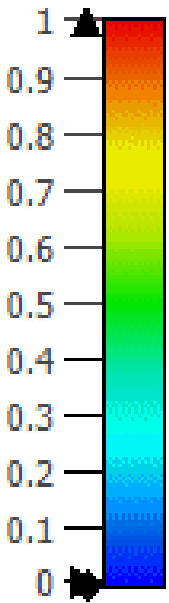
Pystysuora lyhyt
dipoliantenni
puoliksi ilmassa,
puoliksi
häviöllisessä
väliaineessa

raja-pinta →

ilma
 $\epsilon_r = 1$

häviöllinen väliaine
 $\epsilon_r = 2$ ja $\sigma = 0,10$ S/m

V/m



e-field (f=1) [1]



Component	Abs
Frequency	1 GHz
Phase	0 °
Cross section	A
Cutplane at X	0.000 mm
Maximum on Plane (Plot)	20309.8 V/m
Maximum (Solver)	31440.5 V/m

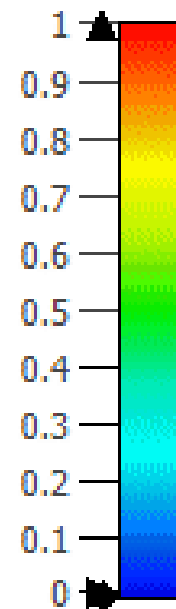
Pystysuora lyhyt
dipoliantenni
häviöllisessä
väliaineessa,
yläreuna yhden
antenninmitan
rajapinnasta

ilma
 $\epsilon_r = 1$

rajapinta

häviöllinen väliaine
 $\epsilon_r = 2$ ja $\sigma = 0,10 \text{ S/m}$

V/m

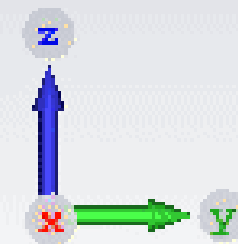


väriskaala
säilyy
samana!

e-field (f=1) [1]



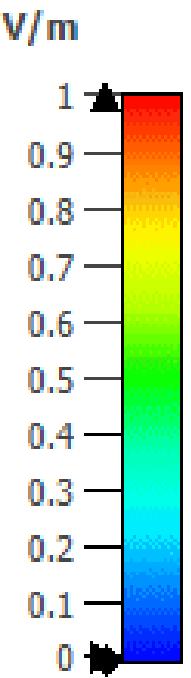
Component	Abs
Frequency	1 GHz
Phase	0 °
Cross section	A
Cutplane at X	0.000 mm
Maximum on Plane (Plot)	16828.9 V/m
Maximum (Solver)	23483.3 V/m



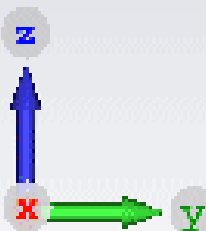
Pystysuora lyhyt
dipoliantenni
häviöllisessä
väliaineessa,
yläreuna kuuden
antenninmitan
päässä
rajapinnasta

ilma
 $\epsilon_r = 1$

rajapinta



väriskaala
säilyy
samana!



häviöllinen väliaine
 $\epsilon_r = 2$ ja $\sigma = 0,10$ S/m

e-field (f=1) [1]



Component	Abs
Frequency	1 GHz
Phase	0 °
Cross section	A
Cutplane at X	0.000 mm
Maximum on Plane (Plot)	16819.4 V/m
Maximum (Solver)	23466.4 V/m

Tunkeutumissyvyys, δ

$$k_i > 0$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u} E_0 e^{-jkz} = \mathbf{u} E_0 e^{-k_i z} e^{-jk_r z}$$

$$|\bar{E}(z)| = E_0 e^{-k_i z} = E_0 e^{-\frac{z}{1/k_i}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \delta = \frac{1}{k_i} = \text{tunkeutumis-} \\ \text{syvyys}$$

$$|\bar{E}(z=\delta)| = E_0 e^{-\frac{\delta}{\delta}} = e^{-1} \cdot E_0 \approx E_0 \cdot 0,37 \quad [\delta] = \frac{1}{\frac{1}{\text{m}}} = \text{m}$$

Kun aalto etenee häviöllisessä väliaineessa tunkeutumissyvyyden

$\delta = 1/k_i$ matkan, on sähkökentän voimakkuus on enää 37 %

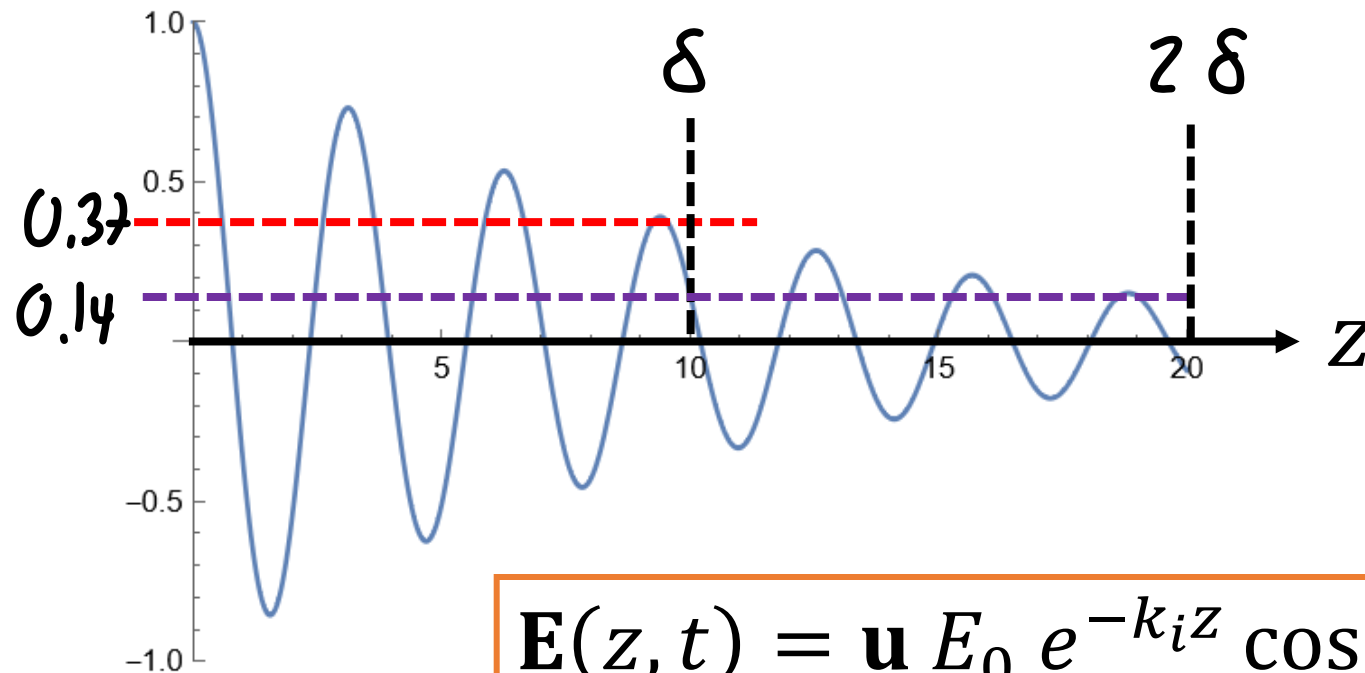
alkuperäisestä kentänvoimakkuudesta E_0 .

Eli kenttä on pienentynyt 63 %.

$$z = 2\delta \quad |\bar{E}| = E_0 e^{-2} = E_0 0,37^2 \\ = E_0 \cdot 0,14$$

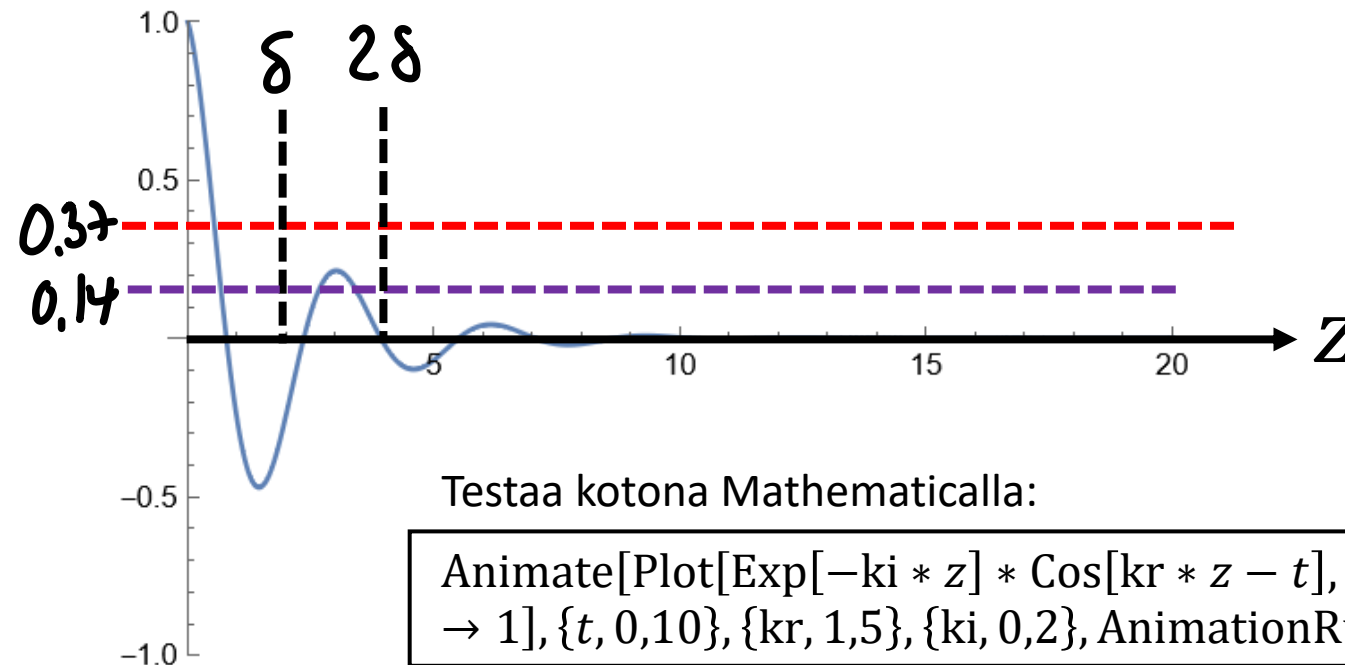
$$k_i = 0,10 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\delta = \frac{1}{k_i} = 10 \text{ m}$$



$$k_i = 0,50 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\delta = \frac{1}{k_i} = 2 \text{ m}$$



Tasoaallon aaltoluku eräässä häviöllisessä väliaineessa on $k = 26 - j 10 \text{ 1/m}$. Kuinka paljon (dB) aalto vaimenee yhden metrin matkalla?

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u} E_0 e^{-jk_r z} e^{-k_i z}$$

$$\log_{10} e = 0,43$$

13%. a. 0,43 dB

42%. b. 4,3 dB

13%. c. 8,6 dB

13%. d. 43 dB

67%. **e.** 86 dB

13%. f. En osaa vastata

Edessä 20, kosh
Sähkökenttä

dB on aina tehosuhte!

$$k = 26 - j 10 \frac{1}{m} \quad k_i = 10 \frac{1}{m}$$

$$|\bar{E}(z)| = E_0 e^{-k_i z} = E_0 e^{-10 \frac{1}{m} z}$$

$$|\bar{E}(0m)| = E_0 e^{-0} = E_0$$

$$|\bar{E}(1m)| = E_0 e^{-10 \frac{1}{m} \cdot 1m} = E_0 e^{-10}$$

$$L = 20 \log \frac{|\bar{E}(0)|}{|\bar{E}(1m)|} = 20 \log \frac{E_0}{E_0 e^{-10}} = 20 \log e^{10}$$

$$= 20 \cdot 10 \underbrace{\log e}_{0.43} = 2 \cdot 100 \cdot 0.43 = 2 \cdot 43 = \underline{\underline{86 \text{ dB}}}$$

Esimerkki: Tarkastellaan ruokaa mikroaaltouunissa. Mikä on tunkeutumissyvyys (m), kun ruoka on pääosin vettä, jonka sähköiset parametrit ovat suhteellinen (reaalinen) permittiivisyys $\epsilon_r = 81$ ja sähköjohtavuus $\sigma = 4 \text{ S/m}$. Mikroaaltouunin käyttämä taajuus on $f = 2,4 \text{ GHz}$.

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) = \epsilon_0 \left(81 - j \frac{4 \frac{\text{S}}{\text{m}}}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^9 \text{ Hz}} \right) = \epsilon_0 (81 - j30)$$

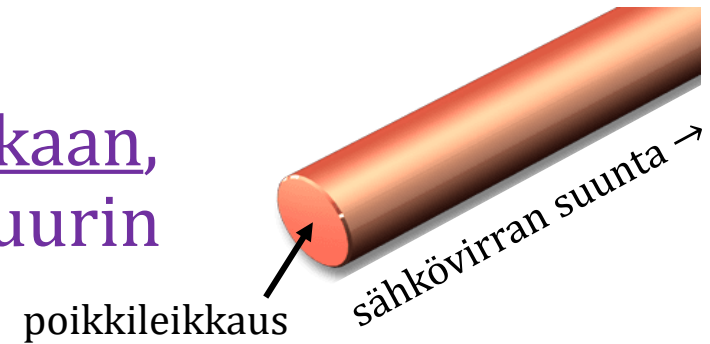
$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{(81 - j30) \epsilon_0 \mu_0} = 460 - j82 \frac{1}{\text{m}} \quad k_i = 82 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{1}{82 \frac{1}{\text{m}}} = 0,012 \text{ m} = \underline{1,2 \text{ cm}} \quad \leftarrow \text{ruoka lämpiää vain pinnasta}$$

(todellisudessa lämpöä johtuu myös sisemmälle)

37% tunkeutumissyvyydellä pinnan amplitudi

Sähkövirta kulkee suoran ympyrälieriön muotoisessa johtimessa lieriön akselin suuntaisesti. Käsityksesi mukaan, missä osassa ympyränmuotoista poikkileikkausta on suurin sähkövirrantiheys $\mathbf{J}$ (A/m²)?



17%. a. Virrantiheys on tasainen koko poikkileikkauksessa

24%. b. Pääosin johtimen keskellä (akselilla)

48%. c. Pääosin johtimen ulkoreunassa (johtimen pinnalla)

12%. d. Virrantiheyden jakauma poikkileikkauksessa riippuu taajuudesta

7%. e. En osaa vastata

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

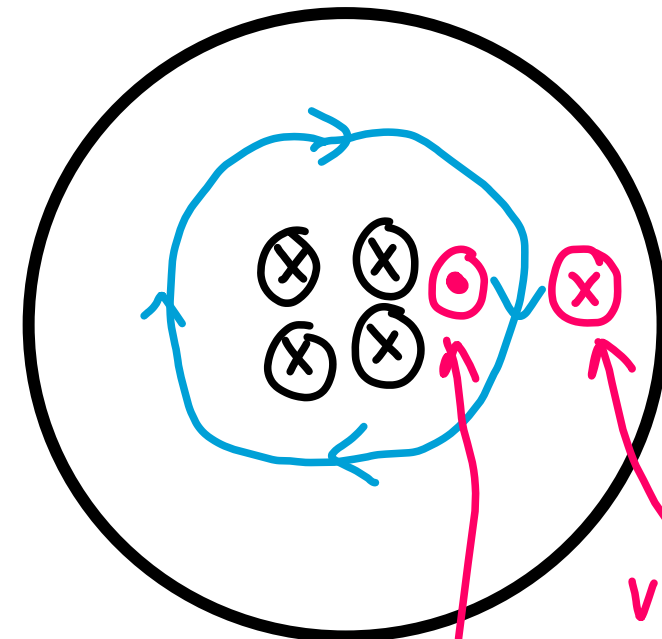
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{J} \text{ kasvaa} \rightarrow \vec{H} \text{ kasvaa}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

virrantiheys $\mathbf{J}$ katsojasta $\otimes$ kohtisuoraan poispäin



virran heikkenee!

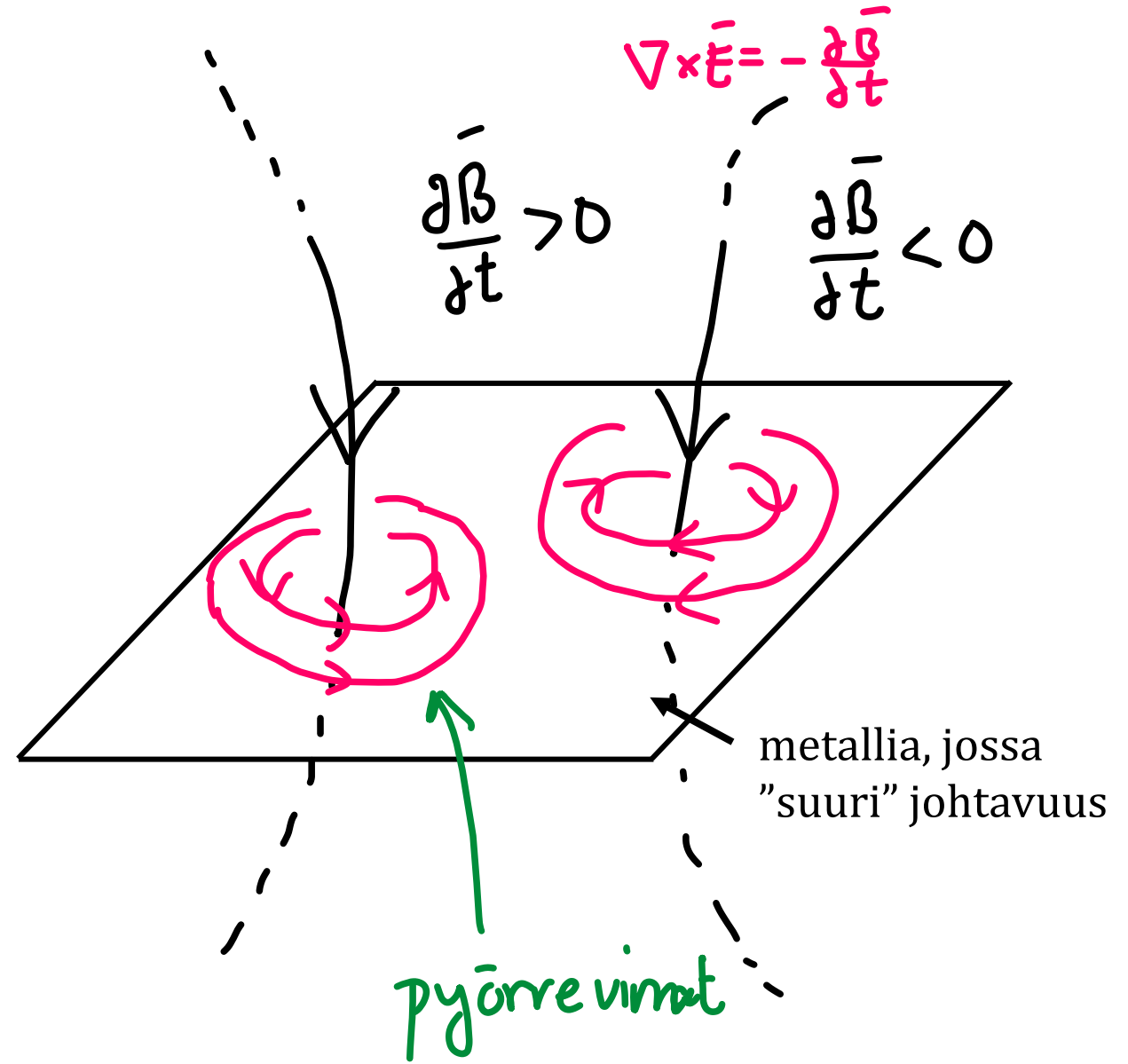
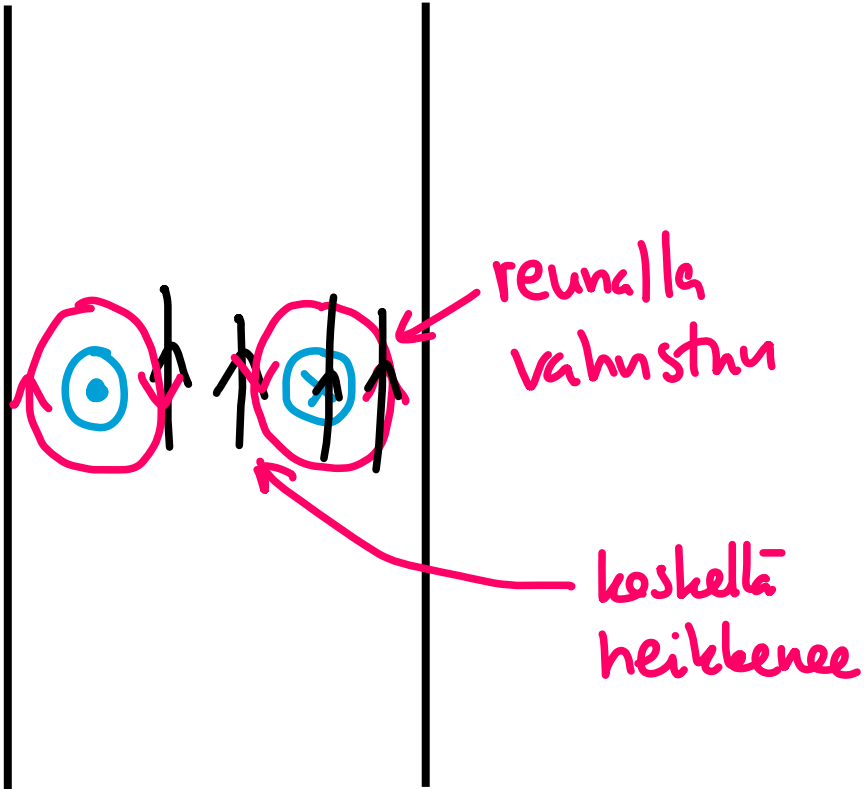
virtantiheys voimistuu

$$\frac{d\vec{B}}{dt} > 0$$

Pyörrevirrat

virrantiheys J ylöspäin
ja kasvaa ajan suhteen $\uparrow$

sähkövirran
suunta $\rightarrow$



Ampèren laki metallissa

kunpi termi on isompi?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E} = (\sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0)\mathbf{E}$$

kupari $\sigma = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

metallissa $\epsilon_r \approx 1$, koska atomit eivät polarisoidu

$\sigma = 10^9$

taajuus	EM spektrin osa	$\omega\epsilon_r\epsilon_0$	onko $\omega\epsilon_r\epsilon_0 \ll \sigma$	Ampèren laki
50 Hz	"Vaihtovirta"	$2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 2,8 \cdot 10^{-9} \frac{\text{S}}{\text{m}}$	ON!	$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$
1,0 GHz	mikroaallot $\lambda = 30 \text{ cm}$	$0,056 \frac{\text{S}}{\text{m}}$	ON!	$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$
10 GHz	mikroaallot $\lambda = 3 \text{ cm}$	$0,56 \frac{\text{S}}{\text{m}}$	ON	$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$
100 GHz	millimetri-aallot $\lambda = 0,3 \text{ cm} = 3 \text{ mm}$	$5,6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$	ON	$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$

Diffuusioyhtälö

metalleissa, joissa on "suuri" johtavuus, siis $|\bar{J}| \gg \left| \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right| = \omega \epsilon_r \epsilon_0$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega \epsilon_r \bar{E} \quad \text{viime viikko}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \epsilon_r \bar{E} \quad \text{eilen, häviölliset väliaineet}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad \text{tänään}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu_0 \bar{H} \quad | \nabla \times$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -j\omega \mu_0 \underbrace{\nabla \times \bar{H}}_{\bar{J}}$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \bar{E})}_{=0} - \nabla^2 \bar{E} = -j\omega \mu_0 \bar{J}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad | \nabla \cdot \bar{J} = \epsilon \bar{E}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H})}_{=0} = \nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad \text{(\nabla \cdot \bar{B} = 0)} \quad \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$-\nabla^2 \bar{E} = -j\omega \mu_0 \bar{J} \quad || \bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} \quad \text{Ohmin laki}$$

$$-\nabla^2 \frac{\bar{J}}{\sigma} = -j\omega \mu_0 \bar{J} \quad | \cdot \sigma$$

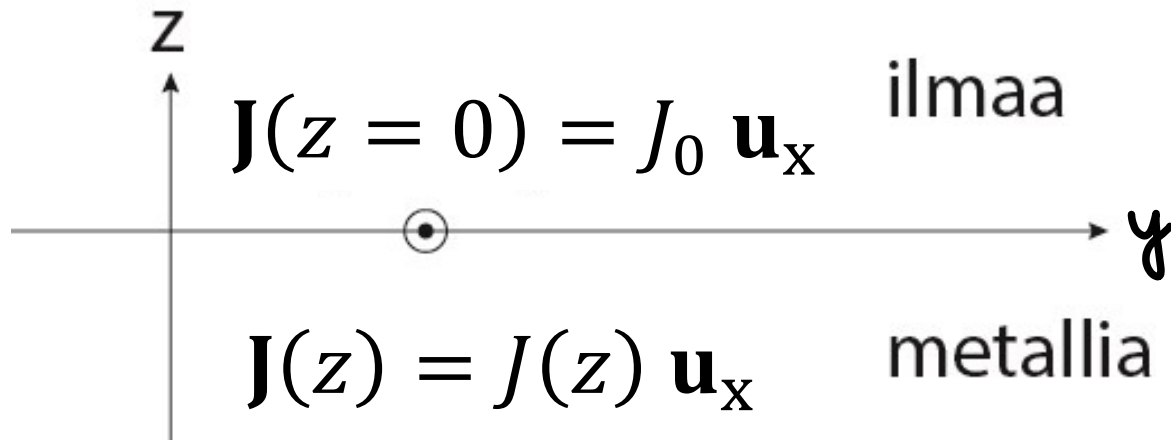
$$\nabla^2 \bar{J} - j\omega \mu_0 \sigma \bar{J} = 0$$

DIFFUUSIOYHTÄLÖ

$j\omega \rightarrow$ 1. aikaderivaatta

aaltoyhtälö: $\omega^2 \rightarrow$ 2. aikaderivaatta

Diffuusioyhtälö karteesisessa koordinaatistossa



huomattava, että
yritetään
diff.yhtälön

$$\nabla^2 \mathbf{J}(z) - j\omega\mu\sigma \mathbf{J}(z) = 0$$

$$\nabla^2 [J(z) \bar{\mathbf{u}}_x] - j\omega\mu\sigma J(z) \bar{\mathbf{u}}_x = 0$$

$$\frac{d^2 J(z)}{dz^2} - j\omega\mu\sigma J(z) = 0$$

$$\text{Yritetään: } J(z) = J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} z}$$

$$\frac{dJ(z)}{dz} = -\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} z}$$

$$\text{Sijoitetaan } \frac{d^2 J(z)}{dz^2} = (j\omega\mu_0\sigma) J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} z}$$

Nablaoperaatiot

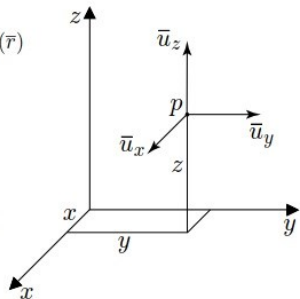
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\rightarrow \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



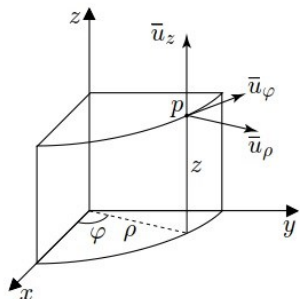
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho \vec{u}_\varphi & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



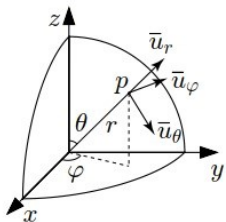
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & r \sin \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille $\vec{f}$

Karteesinen $\leftrightarrow$ sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen $\leftrightarrow$ pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri $\leftrightarrow$ pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy + \vec{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_x = \vec{u}_x dy dz$$

$$d\vec{S}_y = \vec{u}_y dx dz$$

$$d\vec{S}_z = \vec{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \vec{u}_\rho d\rho + \vec{u}_\varphi \rho d\varphi + \vec{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_\rho = \vec{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$d\vec{S}_\varphi = \vec{u}_\varphi d\rho dz$$

$$d\vec{S}_z = \vec{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \vec{u}_r dr + \vec{u}_\theta r d\theta + \vec{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_r = \vec{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_\theta = \vec{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$d\vec{S}_\varphi = \vec{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Vakioita

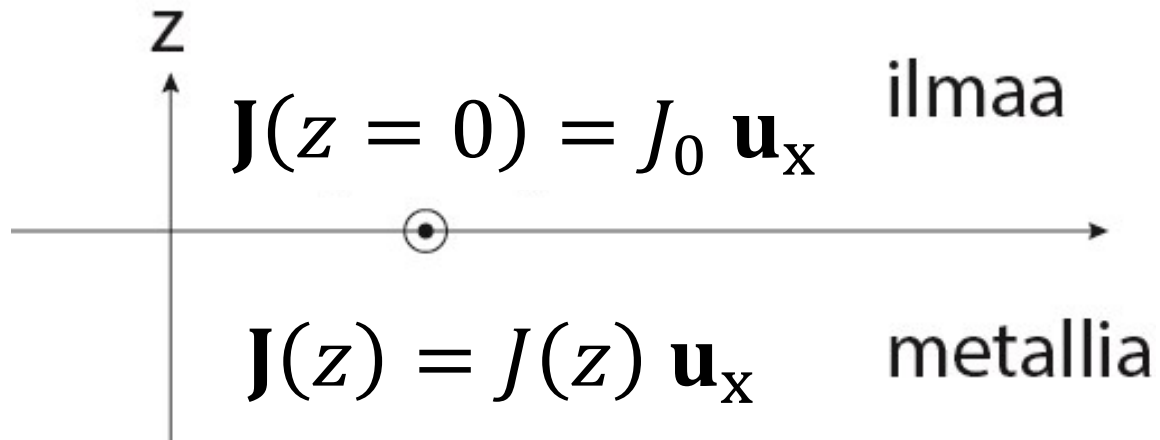
$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Diffuusioyhtälö karteesisessa koordinaatistossa



$$\nabla^2 \mathbf{J}(z) - j\omega\mu\sigma \mathbf{J}(z) = 0$$

$$\mathbf{J}(z) = J(z) \mathbf{u}_x = J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu\sigma} z} \mathbf{u}_x$$

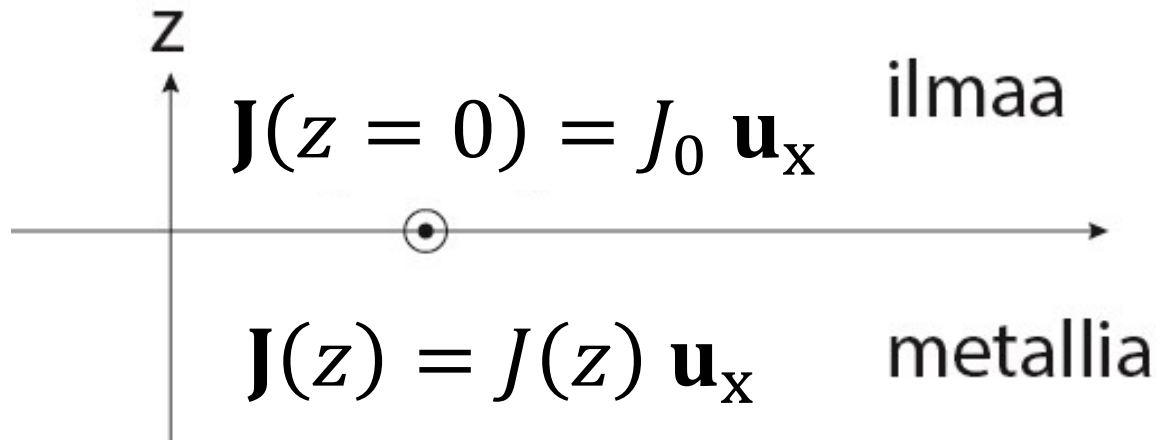
$$J(z) = J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} z} (= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}}) = J_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\delta} z} \cdot e^{-j\frac{\sqrt{2}}{\delta} z}$$

$$= J_0 e^{-\frac{z}{\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}}} e^{-j\frac{z}{\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \text{tunkentumisyvyys}$$

$$J(z) = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \quad |J(z=\delta)| = J_0 e^{-1} = J_0 0.37$$

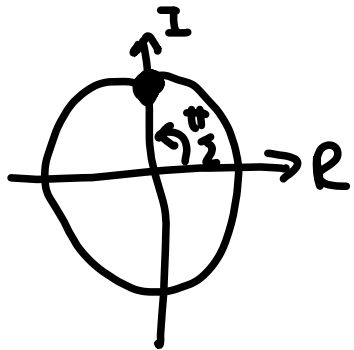
Diffuusioyhtälö karteesisessa koordinaatistossa



$$\nabla^2 \mathbf{J}(z) - j\omega\mu\sigma \mathbf{J}(z) = 0$$

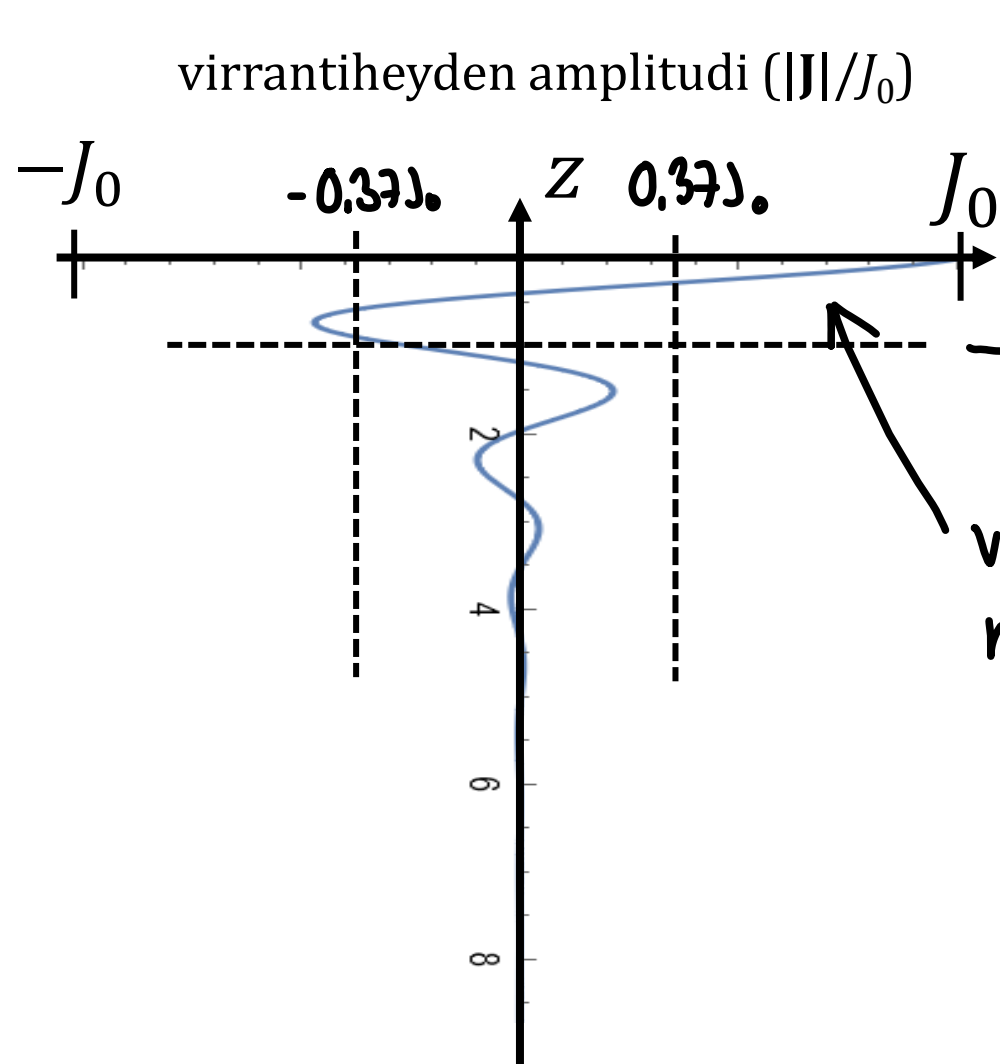
$$\mathbf{J}(z) = J(z) \mathbf{u}_x = J_0 e^{-\sqrt{j\omega\mu\sigma} z} \mathbf{u}_x$$

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{j}$$



$$\begin{aligned} \bar{J}(z,t) &= \text{Re}\{\bar{J}(z) e^{j\omega t}\} \\ &= \bar{u}_x J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Tunkeutumissyvyys ja virran ahtautuminen



$$\mathbf{J}(z, t) = \mathbf{u}_x J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) *$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

virta kulkee
metallin / johteen pinnassa

$\delta = \infty$, kun $\omega = 0$ (dc)

→ ilmiö ei esiinny tasavirralla

Tunkeutumissyvyys ja virran ahtautuminen

Sähkövirta kulkee suoran ympyrälieriön muotoisessa johtimessa lieriön akselin suuntaisesti. Käsityksesi mukaan, missä osassa ympyränmuotoista poikkileikkausta on suurin sähkövirrantiheys J (A/m²)?

- a. Tasaisesti koko poikkileikkauksessa
- b. Pääosin johtimen keskellä (akselilla)
- c. Pääosin johtimen ulkoreunassa (johtimen pinnalla)
- d. Riippuu taajuudesta

