Amperen laki

Virta synnyttää magneettikentän – Amperen laki:

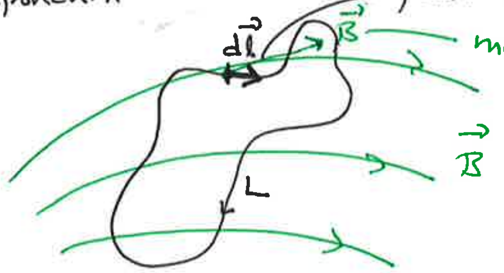
$$\oint_L \underbrace{\vec{B}(\vec{l})\cdot d\vec{l}}_{\text{magneettikentän polunsuuntainen komponentti}} = \mu_0 I_{encl}$$

L: integraali yli suljetun polun

I_{encl}: polun rajaaman alueen läpi kulkeva virta

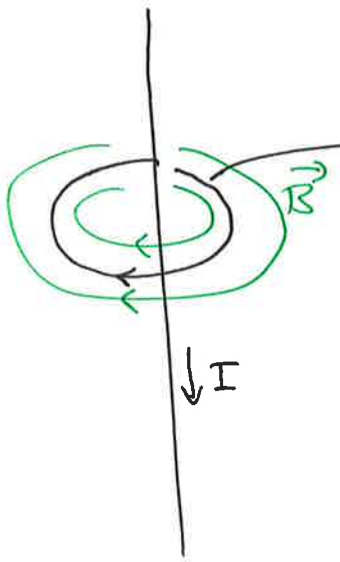
μ_0: tyhjiön permeabiliteetti (luonnonvakio)

eräs polun viiva-alkio



magneettikenttä pisteessä $\vec{l}$: $\vec{B}(\vec{l})$

Esim. Suora virtajohdin



Valitaan poluksi L johtimen ympäri kulkeva r-säteinen ~~ka~~ rengas

polun viiva-alkio aina samansuuntainen paikallisen magneettikentän kanssa

$$\oint_L \vec{B}(\vec{l})\cdot d\vec{l} = \oint \underset{\underset{B(r)}{\shortparallel}}{B(\vec{l})}\, dl$$

$B(r)$ magneettikenttä etäisyydellä r johtimesta

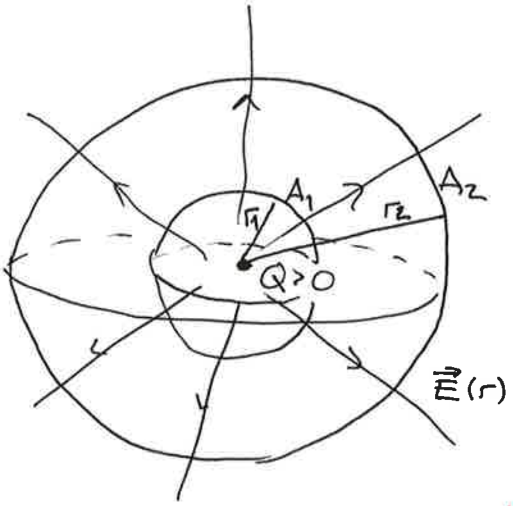
$$= B(r)\overbrace{\oint dl}^{\text{polun pituus } 2\pi r} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 I$$

$B(r)$ vakio polulla sillä polun kaikki pisteet etäisyydellä r.

Amperen laki

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{r}}$$

Gaussin ja Amperen lait — suurien etäisyyksien asymptootit



Gaussin laki (pistevaraukselle)

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} = \vec{E}(r)\hat{r}$

Sama varaus Q pintojen A_1 ja A_2 sisällä $\Rightarrow$ sama vuo

$$\oint_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Pinta-ala verrannollinen r:n neliöön:

$$A_1 = 4\pi r_1^2 \propto r_1^2$$

$$A_2 = 4\pi r_2^2 \propto r_2^2$$

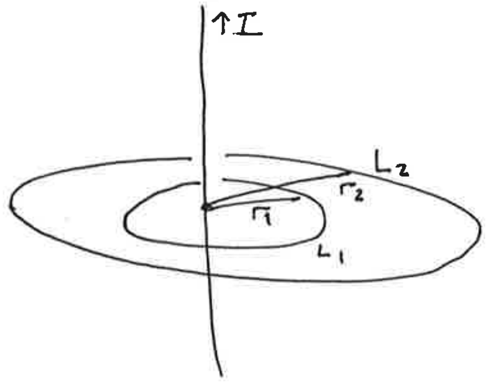
$\Rightarrow$ kentän voimakkuuden on pienennettyvä kuin $1/r^2$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}(r)| \propto \frac{1}{r^2}$, r suuri.

(vrt. Coulombin laki) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$.

Mutta: Gaussin lain antama $\frac{1}{r^2}$ asymptootti pätee vain kolmiulotteisessa tapauksessa. Jos dimensio rajoitettu esim. 2D (kondensaattorilevyjen välissä) tai 1D (johtimen sisällä) muuttuu myös $|\vec{E}|$:n etäisyys-skaalautuminen:
2D:ssä pinta-ala A korvautuu ympyrän kehän pituudella
1D:ssä "Pinta-ala A" on vain kaksi pistettä.

Amperen laki

suoralle johtimelle



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Sama virta I polkujen L_1 ja L_2 läpi

$\rightarrow$ $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B}\cdot d\vec{l}$

Polun pituus verrannollinen etäisyyteen r

$$L_1 = 2\pi r_1$$

$$L_2 = 2\pi r_2$$

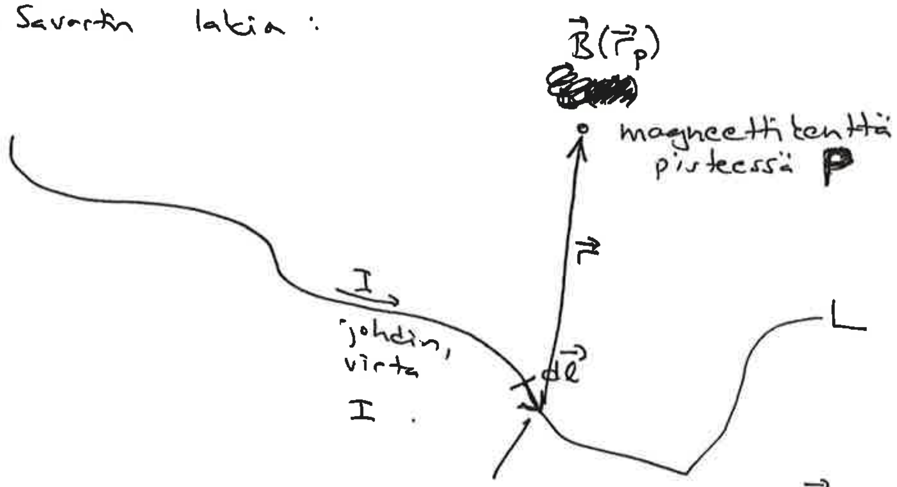
$\Rightarrow$ kentän voimakkuus pienenee kuin $1/r$

$\Rightarrow$ $|\vec{B}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r}$, r suuri

Amperen lailla ei ole vastaavaa dimensioriippuvuutta:

Biot-Savartin laki

Jos meillä ei ole riittäviä symmetrioita Amperen lain käyttöön magneettikentän laskemiseen, voidaan käyttää Biot-Savartin lakia:



johtimen viiva-alkion $d\vec{\ell}$ pisteeseen $\vec{r}_p$ ~~indusoima~~ synnyttämä magneettikenttä alkio $d\vec{B}$ on:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

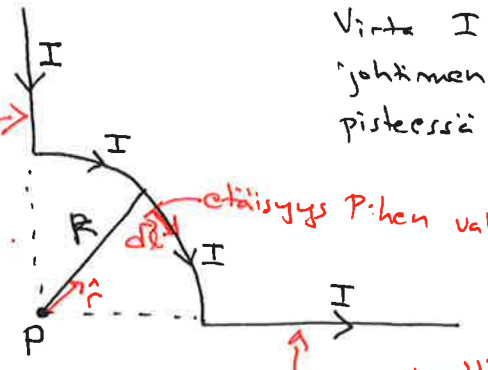
Biot-Savartin laki

johtimen infinitesimaalinen osa, vektorin suunta virran suunta

johtimen osan $d\vec{\ell}$ etäisyys r ja suunta $\hat{r}$ tarkastelupisteeseen $\vec{r}_p$.

Kokonaiskenttä pisteessä $\vec{r}_p$ saadaan sitten integroimalla yli koko johtimen L.

Esim.



Virta I kulkee läpi oheisen johtimen. Magneettikentän vahvuus pisteessä P?

ei kontribuoi kenttään P:ssä, sillä $d\vec{\ell} \uparrow\uparrow \hat{r} \Rightarrow d\vec{\ell}\times\hat{r} = 0$.

etäisyys P:hen vakio, ja $d\vec{\ell} \perp \hat{r}$

ei vaikuta kenttään P:ssä sillä $d\vec{\ell} \uparrow\uparrow \hat{r} \Rightarrow d\vec{\ell}\times\hat{r} = 0$

$d\vec{\ell}$ ja $\hat{r}$ kohtisuorat $\Rightarrow |d\vec{\ell}\times\hat{r}| = \underbrace{|d\vec{\ell}|}_{d\ell}\cdot\underbrace{|\hat{r}|}_{1} = d\ell$.

Vain kaaren osuus vaikuttaa kenttään: $d\vec{\ell}\times\hat{r} = d\ell \cdot \underbrace{\hat{z}\cdot(-1)}$ ristitulon $d\vec{\ell}\times\hat{r}$ suunta $-\hat{z}$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2} d\ell(-\hat{z})$$

$r = R$ koko kaaren matkalla

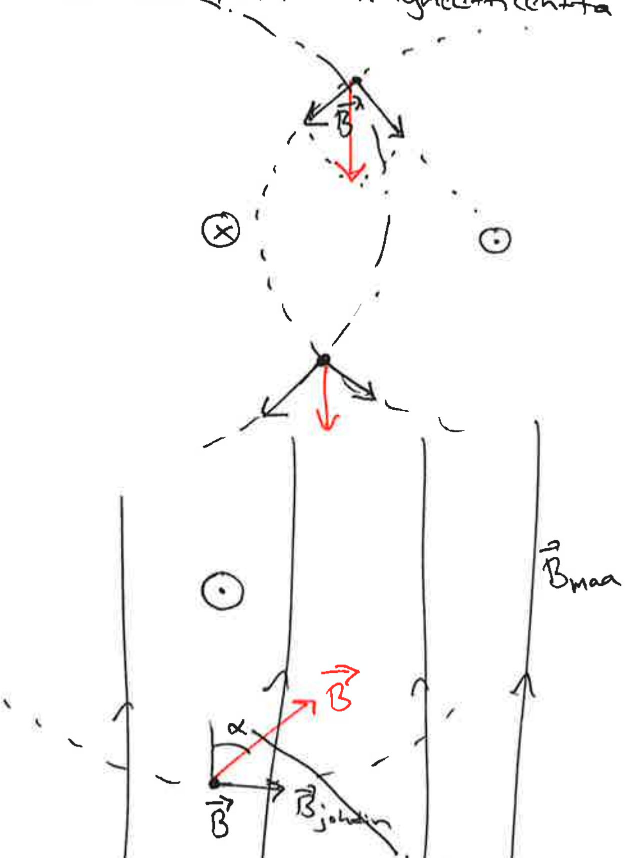
$$= \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}}_{\text{vakio koko kaaren matkan}} d\ell(-\hat{z})$$

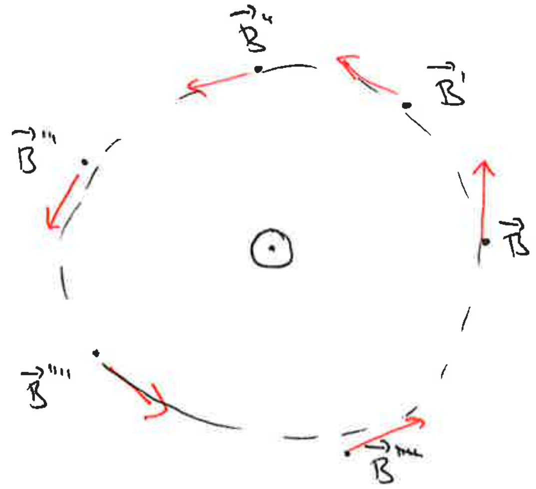
integroidaan yli kaaren (pituus $2\pi R/4 = \frac{\pi R}{2}$)

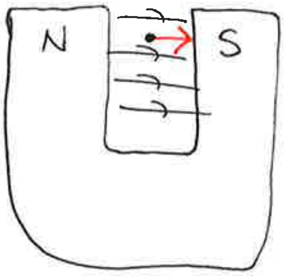
$$\Rightarrow |\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\pi R}{2} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

- minutephysics & veritasium -videot
  * magneettikenttä on suhteellisuusteoreettinen efekti
  * sähkökenttä $\vec{E}$ ja magneettikenttä $\vec{B}$ saman kentän esiintymismuodot: riippuu vain tarkastelukoordinaatistosta

Mihin suuntaan magneettikenttä?

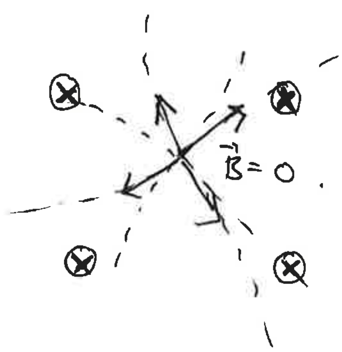


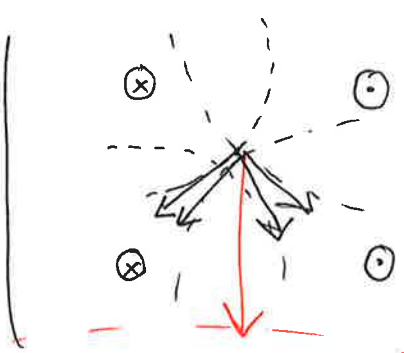


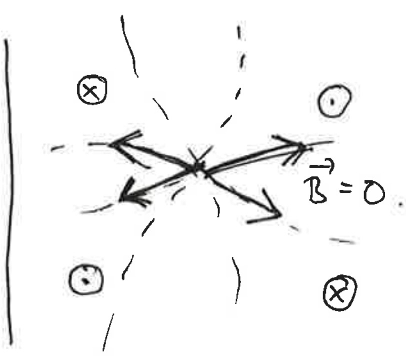


kulma α riippuu $\vec{B}_{maa}$:n ja $\vec{B}_{johdin}$ suuruudesta $\left(\arctan \frac{|B_{maa}|}{|B_{johdin}|}\right)$

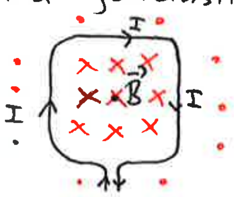
Missä tapauksessa voimakkain $|\vec{B}|$ keskellä?





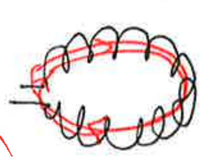


Entä johdinsilmukat?:



solenoidi

toroidi



Varattu hiukkanen magneettikentässä

Lorentzin voima:

$$\boxed{\vec F = q(\vec E + \vec v \times \vec B)}$$

Olkoon $\vec E = \vec 0$: $\vec F = q\vec v \times \vec B$

magneettinen voima aina $\perp$ liikettä vastaan ⇒ työ $dW = \vec F \cdot d\vec s$

siirtymä $\uparrow\uparrow \vec v$

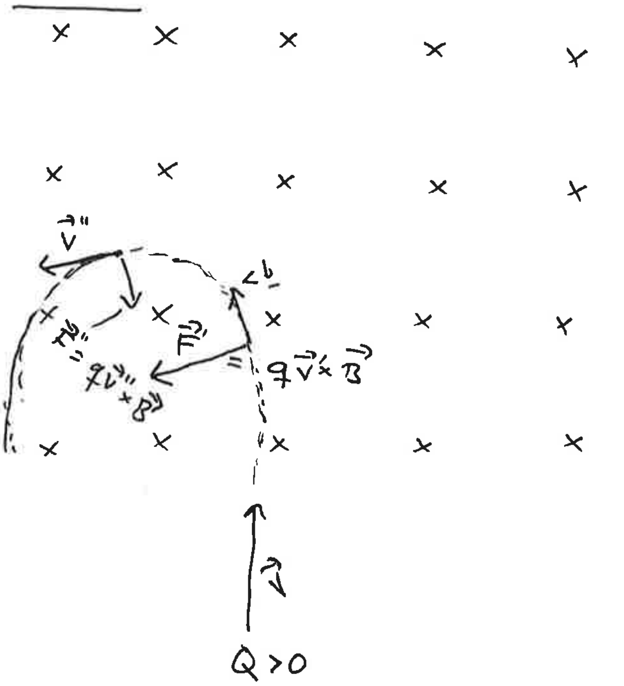
⇒ $dW = 0$.

⇒ magneettikenttä ei tee työtä varaukseen

⇒ hiukkasen vauhti $|\vec v|$ ei muutu, mutta suunta muuttuu

Mutta huomaa: myöhemmin huomaamme että ajasta riippuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän joka puolestaan muuttaa varauksen nopeutta.
⇒ ajasta riippuva magneettikenttä tekee työtä.

Esim.



Varatun hiukkasen rata (tasossa) homogeenisessa magneettikentässä ympyrärata:

keskihakuvoima

$$\vec F = q\vec v \times \vec B = m\frac{v^2}{r}\cdot\hat z$$

⇒ säde r:

$$q v_\perp B = \frac{m v_\perp^2}{r}$$; $v_\perp$ on $\vec B$:tä vastaan kohtisuora komponentti

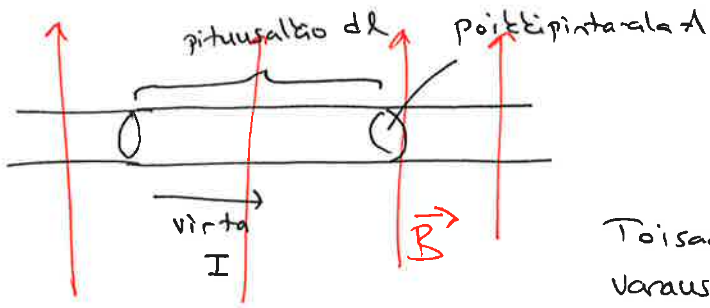
⇒ $$\boxed{r = \frac{m v_\perp}{qB}}$$

Jos nopeus $\vec v$ ei ole kohtisuorassa $\vec B$:tä vastaan, on rata spiraali (ulos/sisään tasosta).

Virtajohdin magneettikentässä

~~Kahden johtimen välinen magneettinen voima~~

Johdin $\overset{\text{kohtisuorassa}}{\vee}$ magneettikentässä $\vec{B}$:



Ajassa dt A:n läpäisee varausmäärä $\underline{dQ = I \cdot dt}$.

Toisaalta, jos varaustiheys ρ ja varausten nopeus $|\vec{v}|$ (suuruus)

$$\Rightarrow \quad dQ = \rho \times A \times \underbrace{dl}_{|\vec{v}| \cdot dt = v dt} = \rho A v dt$$

A:n läpäisemä varausmäärä

Magneettikenttä $\vec{B}$: varausmäärään dQ kohdistuva Lorentzin voima on (mikä on sen suunta ?)

$$|d\vec{F}| = dQ \cdot \underbrace{v \cdot B}_{\vec{v} \text{ ja } \vec{B} \text{ kohtisuorat}}$$

$$= I \cdot \underbrace{dt \cdot v}_{dl} \cdot B = I \, dl \, B .$$

Integroidaan yli koko johtimen → koko johtimeen vaikuttava kokonaisvoima

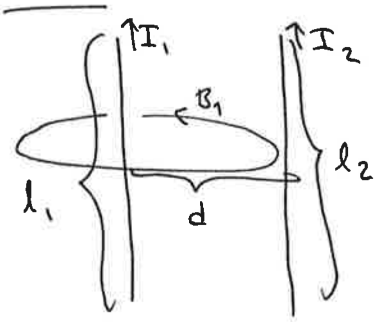
$$|\vec{F}| = \int I B \, dl = I B \underbrace{\int dl}_{\text{johtimen pituus } l} = I l B .$$

Jos $\vec{B}$ ei oleteta kohtisuoraa :

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} .$$

$I\vec{l}$:n suunta = virran suunta

Esim.

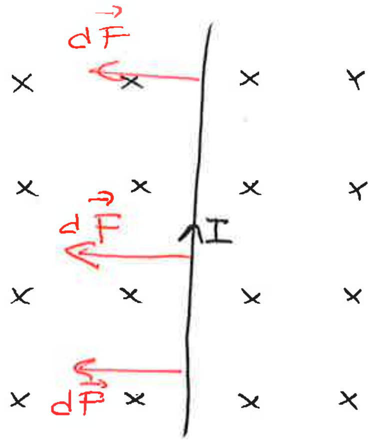


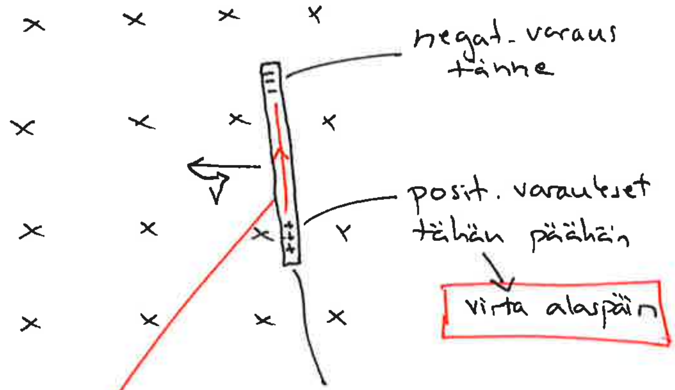
Johdin 1 luo johtimen 2 kohdalle magneettikentän $\vec{B}_1$: $|\vec{B}_1| = B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$.

Johtimeen 2 kohdistuva voima

$$|\vec{F}_2| = F_2 = I_2 l_2 \cdot B_1 = I_2 l_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l_2 = F_2}$$

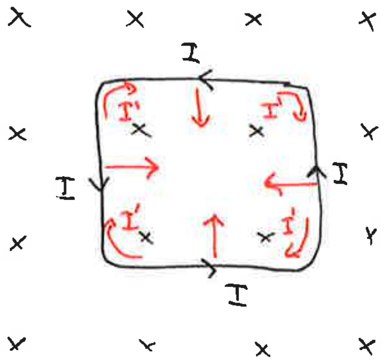
Millainen voima kohdistuu johtimeen / johdinsilmukkaan?





Sauva polarisoituu liikkuessaan magneettikentässä.

Varausjakauma synnyttää sähkökentän, ~~ja virta alaspäin~~
kun $\vec{E}$ ja $\vec{v} \times \vec{B}$ tasapainossa lakkaa "virta" sauvassa.



Venyvä lötköpötkö johdinsilmukka (+ virta vastapäivään).

kun johdinsilmukka painuu kasaan, indusoituu siihen virta, koska johdinpätkät liikkuvat "poikittain" kentässä

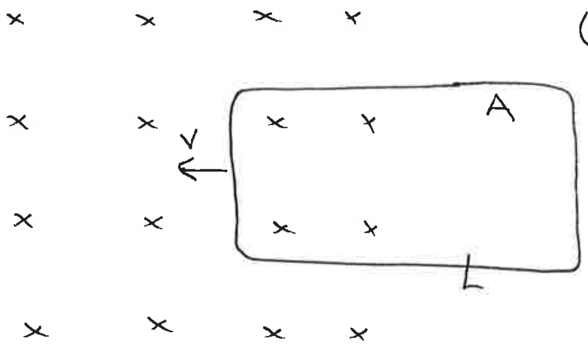
⇒ virta myötäpäivään

⇒ kun $|I| = |I'|$, lakkaa virta silmukassa ja silmukan kokoonpainuminen pysähtyy.

Vedetään johdinsilmukka (ilman virtaa) magneettikenttään.

Johdinsilmukkaan indusoituu virta I vastapäivään.

Magneettikentän vuo



Vielä yksi tapa tarkastella tilannetta (ehkä lukiostakin tuttu).

Johdinsilmukkaan L indusoituva lähdejännite

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt},$$

lähdejännitteen käsite kuitenkin huono, sillä sitä vastaava sähkökenttä ei ole konservatiivinen → ei ole siis potentiaalia.

missä Φ_B on johdinsilmukan läpäisevä magneettikentän vuo

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

integraali yli silmukan rajaaman pinnan A.

Φ_B voi muuttua monella tavalla:

- magneettikenttä voi liikkua
- johdinsilmukka voi liikkua
- johdinsilmukan muoto voi muuttua
- magneettikentän vahvuus voi muuttua

Lenzin laki (muistisääntö indusoituneen virran suunnalle)
"johdinsilmukkaan indusoituva virta vastustaa magneettivuon suuruuden muutosta"