Luento 2
Todennäköisyyslaskennan perusteet, bayesiläinen analyysi

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Boolen algebra

- Muuttujat A,B, ... voivat olla *joukkoja*, *tapahtumia* tai *lauseita*
- Kullakin voi olla kaksi tilaa, joita yleensä merkitään 1 ja 0
- φ(A) = 1 tarkoittaa “kuuluu joukkoon A”, “A ei ole toimintakunnossa” tai “Lause A tosi”
- φ(A) = 0 tarkoittaa “ei kuulu joukkoon A”, “A on toimintakunnossa” tai “Lause A epätosi”
- Perusoperaatiot:

	Joukko	Lause	Tapahtuma	
Unioni	A U B	A tai B	A + B	Looginen summa
Leikkaus	A ∩ B	A ja B	A · B	Looginen tulo
Negaatio	¬A	ei A	Ā	Komplementti

- Luotettavuusteoriassa käytetään yleensä merkintöjä +, ·, –

Boolen algebra

- Ω = täydellinen joukko, varma tapahtuma tai aina tosi lause, joka saa arvon 1 aina (riippumatta A:n ja B:n “arvosta”)

- ϕ = tyhjä joukko, aina epätosi, mahdoton tapahtuma, joka saa “arvon” 0 aina

- $\varphi(\Omega) = 1$, $\varphi(\phi) = 0$

Boolen algebran lisämääritelmiä

- $B - A = \bar{A} \cdot B$

- A ja B ovat *toisensa poissulkevia*, joss $A \cdot B = \phi$

  - esim. A ja $\bar{A}$ ovat toisensa poissulkevia

Boolen algebran laskentalait

- $A + \bar{A} = \Omega$
- $A \cdot \bar{A} = \phi$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + \phi = A$
- $\Omega \cdot A = A$
- $\phi \cdot A = \phi$

Vaihdantalait

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + B = B + A$

Liitäntälait

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$

Osittelulait

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Supistuslait

- $A \cdot A = A$
- $A + A = A$

Absorptiolait

- $A + AB = A$
- $A \cdot (A + B) = A$

de Morganin säännöt

- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Summan esittäminen toisensa poissulkevan termin avulla

- $A + B = A + \bar{A} \cdot B$
- Hyödyllinen luotettavuustekniikan sovelluksissa
- A ja $\bar{A} \cdot B$ ovat toisensa poissulkevia

Todennäköisyysteoria

- Todennäköisyys on joukon, tapahtuman tai lauseen totuuden mitta
- P(A) = Todennäköisyys sille, että tapahtuma kuuluu joukkoon A, eli että $\varphi(A) = 1$

- Frekvenssitulkinta on suhteellinen osuus suuressa määrässä tilanteita, joissa mahdollisuusjoukko toistuu antaen tapahtuman A (lause A toteutuu)
  $P(A) = \lim_{N\to\infty} N(A)/N$

- Subjektiivinen tulkinta: P(A) on mitta sille kuinka vahvasti uskotaan tapahtuman A toteutuvan

Kolmogorovin aksioomat

- $0 \leq P(A)$
- $P(\Omega) = 1$
- Kaikille toisensa poissulkeville tapahtumille A ja B ($A \cap B = \phi$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ehdollinen todennäköisyys

P(A|C) = A:n ehdollinen todennäköisyys, ehdolla C
= tapahtumien A osuus niiden tapahtumien joukossa joissa C tapahtuu
= niiden tapahtumien osuus, joissa tapahtuu sekä A että C jaettuna niiden tapahtumien osuudella, joissa C tapahtuu

$P(A|C) = P(A \cdot C) / P(C)$, vastaavasti $P(C|A) = P(A \cdot C) / P(A)$

$P(A \cdot C) = P(C) \cdot P(A|C) = P(A) \cdot P(C|A)$

- Usein C edustaa jotakin syysuuretta ja A havaintosuuretta ja kiinnostaa tietää millä todennäköisyydellä syy C on aiheuttanut havainnon A

Bayesin kaava

- $P(C|A) = P(A|C) \cdot P(C) / P(A)$

- sovelletaan myöhemmin luotettavuusparametrien estimoinnissa

Tilastollinen riippumattomuus

Määritelmä

- B on riippumaton (tilastollisesti riippumaton) A:sta, jos $P(B|A) = P(B)$

Seuraus

- Jos B on riippumaton A:sta niin A on riippumaton B:stä
- Keskenään riippumattomille A ja B siis on
$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$
- Ei ole sama asia kuin toisensa poissulkevuus!

Satunnaismuuttuja ja todennäköisyysjakauma

- Satunnaismuuttuja X on reaaliarvoinen
- Sen realisaatio x voi saada arvoja joukossa R eli $\Omega = \{-\infty, \infty\}$
- Satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma

  $F(x) = P(X \leq x) \Rightarrow P(X > x) = 1 - F(x)$
- Ollakseen todennäköisyysjakauma F(x):lle pätee
  - $F(x) \geq 0$
  - $F(\infty) = 1$
  - F(x) on monotonisesti kasvava: $x > y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$

Jatkuva satunnaismuuttuja

- Satunnaismuuttuja X on jatkuva, jos F(x) on kaikkialla jatkuva

- X:n todennäköisyystiheys on
  - $f(x) = dF(x) / dx$

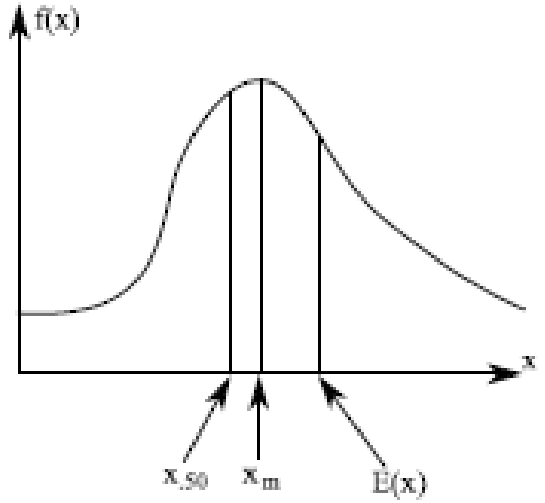
Diskreetti satunnaismuuttuja

- Satunnaismuuttuja X on diskreetti, jos se voi saada vain erillisiä arvoja tai numeroituvan määrän $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- Tällöin F(x) on porrasfunktio, joka kasvaa epäjatkuvasti pisteissä x_i ja on vakio pisteiden välillä
- Todennäköisyysjakauma esitetään pistetodennäköisyysfunktion $p_i = P(X = x_i)$ avulla
  - $0 \leq p_i \leq 1$
  - $F(x) = \sum_{xi \leq x} p_i$
  - $\sum_i p_i = 1$

Jakauman keskikohdan mittoja

Odotusarvo (keskiarvo) $m_1 = E(X)$

- $E(X) = \int x\, f(x)\, dx$ tai
- $E(X) = \sum_i p_i\, x_i$



Mediaani x_{50}

- $F(x_{50}) = 0{,}5$

Moodi

- todennäköisin arvo, tiheysfunktion maksimikohta

Jakauman leveyden mittoja

Fraktiili (persentiili), esim. α-fraktiili

- $F(x_\alpha) = \alpha$
- tyypillisesti kiinnostavat x_{05} ja x_{95}

Varianssi V(x)

- $V(x) = E[(x - m_1)^2]$
- Keskihajonta on varianssin neliöjuuri

Epävarmuuskerroin EF (Error Factor)

- lognormaalijakaumassa $EF = x_{95}/x_{50} = x_{50}/x_{05}$
- muutoin yleensä $x_{95}/x_{50} \neq x_{50}/x_{05}$, jolloin $EF = x_{95}/x_{50}$ tai $EF = x_{50}/x_{05}$ tai $EF = \sqrt{x_{95}x_{05}}$

Yhteisjakauma

- $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- tiheysfunktio $f_{XY}(x, y)$

Reunajakauma

- $f_X(x) = \int f_{XY}(x, y)\, dy$

Ehdollinen jakauma

- $f(x|y) = f_{XY}(x, y) / fy(y)$

Jos X ja Y ovat tilastollisesti riippumattomia

$f_{XY}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

Satunnaismuuttujien summan Z = X + Y jakauma

- Tunnetaan $f_x(x)$ ja $f_y(y)$
- Mikä on $f_z(z)$?

- Käsitellään erityistapaus, että x ja y toisistaan riippumattomia
- Tällöin $f_z(z)$ voidaan lasketaan konvoluutiointegraalina

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_x(z-y)\, f_y(y) dy$$

- Luotettavuustekniikassa kyseistä kaavaa tarvitaan esim. kahden peräkkäisen vikavälin tai vikaantumisajan ja korjausajan summan jakauman laskemiseksi

Esimerkki diskreetistä jakaumasta

Bernoullin jakauma

- X:llä on kaksi mahdollista arvoa {0,1}

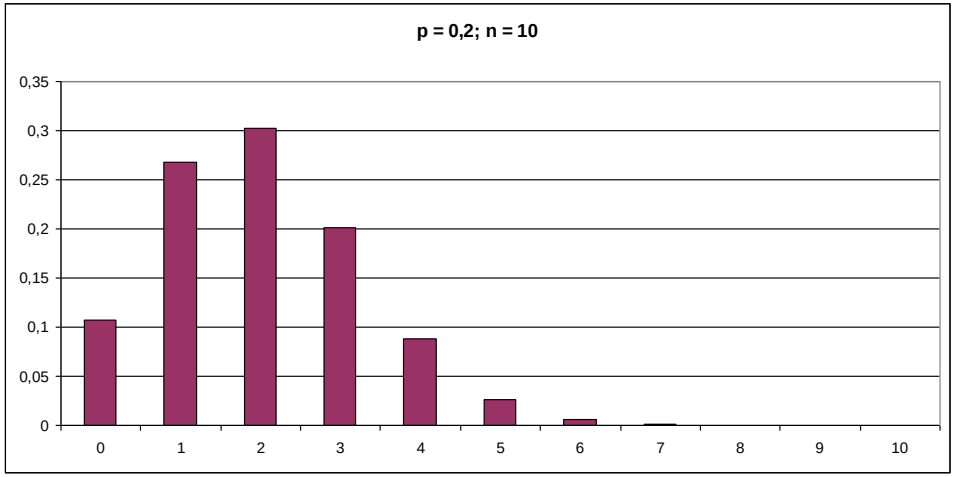
- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = q = 1 – p$

Tunnusluvut:

- $EX = p$
- $Var(X) = p(1 – p)$

Esimerkki diskreetistä jakaumasta binomijakauma

- n:n toisistaan riippumattoman Bernoulli-jakautuneen muuttujan summa
- $Y = X_1 + \ldots + X_n$
- $p(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \ldots, n$



Tunnusluvut:

- EY = np
- Var(Y) = np(1 – p)

Multinominaalijakauma

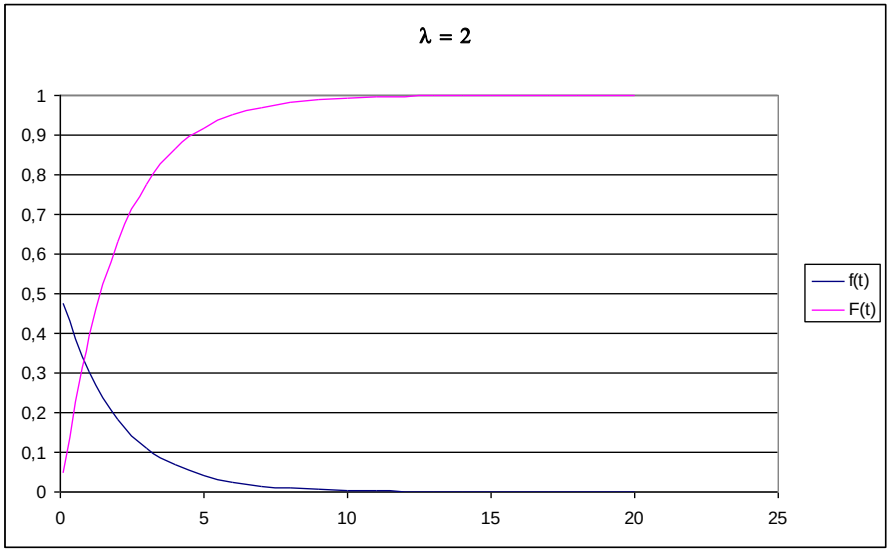
- Yleistys binomijakaumasta, joka on summa Booleanarvoisten muuttujien lukumäärästä
- Yleisemmin muuttujalla on diskreetti äärellinen määrä arvoja j = 1, …, k
- Todennäköisyys $P(X_i = j) = p_j$, ja p_j:tten summa on 1
- Soveltuu esim. luokiteltuun vikadataan, jossa on useampia toisensa poissulkevia vikamoodeja
- Jokaisen luokan j reunajakauma on binomijakauma

Esimerkki jatkuvasta jakaumasta
Eksponentiaalijakauma

- Tiheysfunktio $f(t) = \lambda \cdot \exp\{-\lambda t\}$, $t \geq 0$
- Kertymäfunktio $F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$

Tunnusluvut:

- $ET = 1/\lambda$
- $Var(T) = 1/\lambda^2$



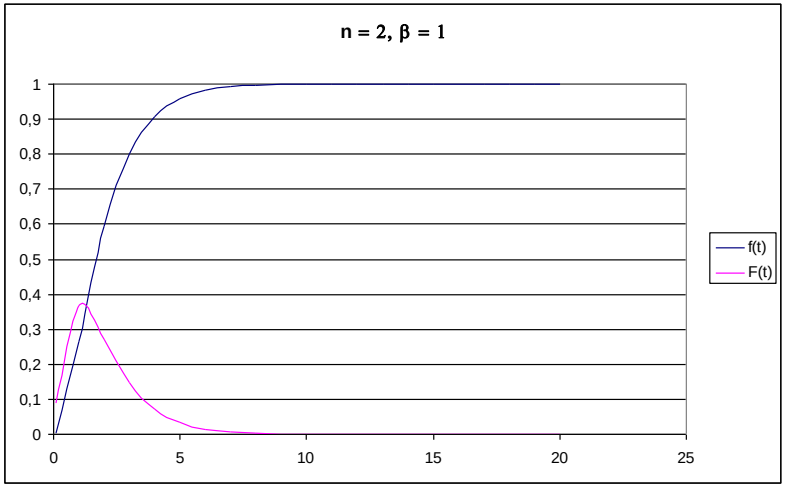
Esimerkki jatkuvasta jakaumasta
Erlangin jakauma

- n:n toisistaan riippumattoman eksponentiaalijakautuneen muuttujan summa $S = T_1 + \ldots + T_n$

$$f(s) = \lambda \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$$

- Tunnusluvut:
  $E[S] = n / \lambda$
  $Var[S] = n / \lambda^2$
- kuuluu gammajakaumien perheeseen

$$f(s) = \lambda \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\beta x}$$



Todennäköisyystulkinnat (1/2)

- Subjektiivinen todennäköisyys
  - Kuvastaa kaiken käytettävissä olevan tietämyksen varaan perustuvaa näkemystä siitä, miten mahdollisena tapahtuman toteutumista pidetään
  - Näkökohtia
    - » ”Kaikkea tietämystä” vaikea hankkia
    - » Näkemykset voi poiketa toisistaan tai olla ristiriitaisia
    - » Näkemykset päivitettävissä Bayesin kaavalla

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)},$$

    - » missä $P(H)$ = Hypoteesin a priori tn
      $P(E)$ = Evidenssin saamisen tn
      $P(H|E)$ = Hypoteesin posteriori tn
- Todennäköisyydet riskianalyysissä
  - Ilmiöt monesti harvinaisia eivätkä toistettavissa
  - Sovelletaan usein subjektiivisia todennäköisyyksiä
  - Hyödynnetään käytettävissä olevia ja relevantteja tilastoja

Todennäköisyystulkinnat (2/2)

- Frekventistinen tulkinta
  - Todennäköisyys on raja-arvo, joka saadaan tarkastelemalla tilastollisesti äärettömän isoksi kasvavaa aineistoa
  - Esim. kruunan (eng. head) todennäköisyys saadaan raja-arvona sarjasta

$$P_H = \frac{N_H}{N}, N \to \infty,$$

jossa kolikkoa heitetään äärettömän monesti ja

jossa N = kaikkien heittojen määrä ja
N_H = saatujen klaavojen määrä

- Näkökohtia
  - Reaali-ilmiöillä riittäviä toistoja ei voida tehdä
    - » Mahdotonta, liian kallista, liian hidasta
    - » Esim. tuotannonohjaus, koronnostot, suojavallit
  - Toistot eivät tapahdu identtisissä olosuhteissa
  - Tilastot antavat kuitenkin tukea muille analyyseille

Luotettavuusparametrien estimointi

- Klassinen estimointi
- Bayes

Klassinen estimointi

- Satunnaismuuttuja X
- Kertymäfunktio $F(x; \theta_1, \ldots, \theta_r)$
- Parametrit $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ tuntemattomia
- Otos eli havainnot $(x_1, \ldots, x_n)$
- Mitkä parametrien arvot kuvaavat parhaiten X:n todennäköisyysteoreettista käyttäytymistä?
- Estimointi tapahtuu sijoittamalla havainnot kaavaan eli estimaattoriin, jonka antamaa tulosta käytetään parametrin estimaattina
- Piste-estimaatti on estimaattorin antama likiarvo estimoitavalle parametrille
- Väliestimaatti on otoksen ja estimaattorin määräämä väli, jonka sisäpuolella estimoitavan parametrin todellinen arvo jää annetulla todennäköisyydellä

Maximum likelihood eli suurimman uskottavuuden menetelmä

- Likelihoodfunktio $L(\theta) = f(x_1 ; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_1 ; \theta)$, missä $f(x_1 ; \theta)$ on tiheysfunktio

- Maximum likelihood –estimaatti on se joka maksimoi likelihoodfunktion eli havaittu otos on todennäköisin sillä arvolla

Momenttimenetelmä

- Satunnaismuuttujan momentti

$$m_k(\theta) = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

- Esimerkiksi m_1 on odotusarvo

- Otosmomentti

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Jos parametreja on yksi, ratkaistaan $m_1(\theta) = \hat{m}_1$
- Jos parametreja on k kpl, muodostetaan yhtälöryhmä momenteista i = 1, …, k

Binomijakauman p

- Otos n havaintoa, joista k kpl 1:ä ja n−k 0:a
- Satunnaismuuttuja X on 1:sten lukumäärä, ja on binomijakautunut parametrilla p
- Likelihoodfunktio

$$L(p) = P(X = k; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Derivoimalla p:n suhteen saadaan maksimi

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Poisson-prosessin (eksponenttijakauman) λ

- Otos n havaintoa ajanjaksolla T
- Satunnaismuuttuja X on havaintojen lukumäärä ja se on Poisson-jakautunut parametrilla λT
- Likelihoodfunktio

$$L(\lambda) = P(X = n; \lambda T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp(-\lambda T)$$

- Derivoimalla λ:n suhteen saadaan maksimi

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$$

Bayes

- Parametrit (θ_1, …, θ_r) käsitellään satunnaismuuttujina
- Likelihoodfunktio on ehdollinen todennäköisyys havaita otos (x_1, …, x_n) ehdolla tietyt parametrien arvot
- Parametrien priorijakauma päivitetään Bayesin kaavan avulla

$$P(\theta \,|E) = \frac{L(E|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} L(E|\theta)p(\theta)d\theta}$$

Bayesiläinen analyysi, binomijakauman p

- Havainnot $E = \{k_1, \ldots, k_n\}$ ovat Bernoullijakaumasta (0 tai 1), $P(k_i = 1) = p$
- Jos havainnot ovat riippumattomia, on likelihoodfunktio

$$L(p) = P(X = k; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Priorijakaumaksi valitaan tässä tapauksessa yleensä betajakauma, koska se on konjugaattijakauma binomiotannalle => Posteriorijakauma on myös beta

$$f(p; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

$$p \sim Beta(\alpha, \beta)$$

Binomijakauman p posteriorijakauman

- Posteriorijakaumaksi tulee

$$p \sim Beta(\alpha + k, \beta + n - k)$$

Binomijakauman p:n priorijakauma

- Kirjallisuudessa esitetään erilaisia vaihtoehtoja
  - Beta(0;0) = toimii vain jos 0 < k < n
  - Beta(0,5;0,5) = ns. epäinformatiivinen priori
  - Beta(1; 1) = tasajakauma
- Beta(0,5;0,5) on yleisimmin käytetty

- Posteriorijakauman odotusarvo

$$E[p|k,n] = \frac{k + 1/2}{n + 1}$$

Poisson-prosessin lambda

- Satunnaismuuttuja X on havaintojen lukumäärä ja se on Poisson-jakautunut parametrilla λT
- Likelihoodfunktio

$$L(\lambda) = P(X = n; \lambda T) = \lambda^n \exp(-\lambda T)$$

- Priorijakaumaksi valitaan tässä tapauksessa yleensä gammajakauma, koska se on konjugaattijakauma Poisson-otannalle => Posteriorijakauma on myös gamma

$$f(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$$

$$\lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

Poisson-prosessin lambda posteriorijakauma

- Posteriorijakaumaksi tulee

$$p \sim Gamma(\alpha + k, \beta + T)$$

Poisson-prosessin lambdan priorijakauma

- Gamma(0,5;0) = epäinformatiivinen priori ja yleisimmin käytetty

- Posteriorijakauman odotusarvo

$$E[\lambda|k,T] = \frac{k+1/2}{T}$$

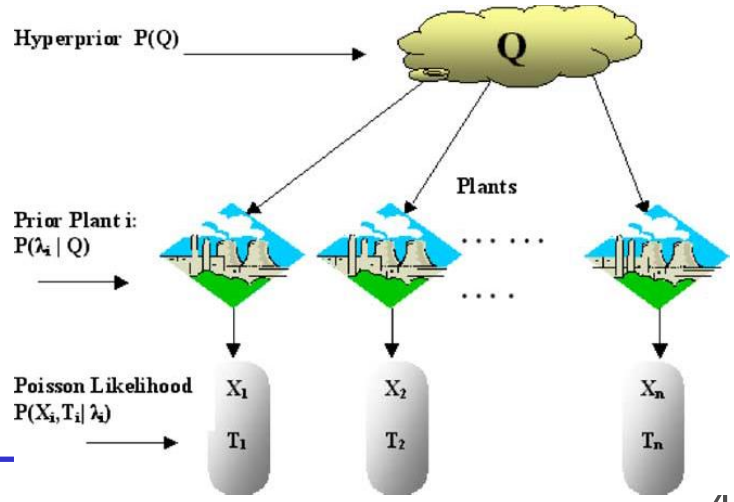
Kaksivaiheinen estimointi heterogeenisesta populaatiosta

- Vikatapahtumia kerätään useammalta laitokselta
- Laitoskohtainen data homogeenista
- Laitosten välillä eroa

- Esim. komponentin vikatodennäköisyys p_i laitoksella i, i = 1, …, M
- Parametrit p_i, i = 1, …, M estimoidaan yhteisesti kaikkien laitosten datasta, mutta oletetaan että p_i voi vaihdella laitoksittain
- Laitoskohtaisesti likelihoodfunktio kuten edellisissä kalvoissa
- Käytössä on erilaisia tapoja tehdä ”hierarkkinen” estimointi

Kaksivaiheinen bayesiläinen analyysi

- Laitoskohtaiset havainnot $E = \{(k_1, T_1), \ldots, (k_M, T_M)\}$ noudattaa Poissonjakaumaa parametreilla $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$
- Parametrit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$ ovat otos jostain populaatiosta $p(\lambda|\theta)$
- θ kutsutaan hyperparametriksi ja sen jakaumaan hyperprioriksi



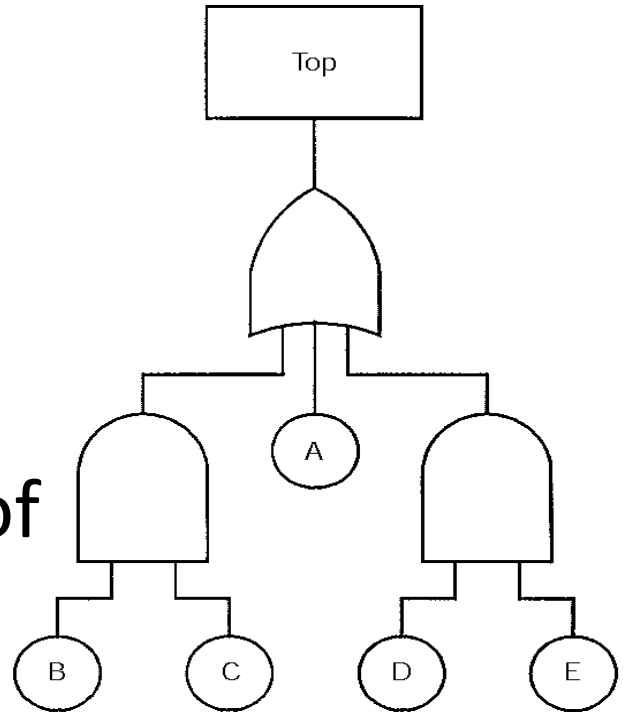
Bayesian networks (BN)

The following slides have been prepared by Alessandro Mancuso

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Fault tree analysis (FTA)

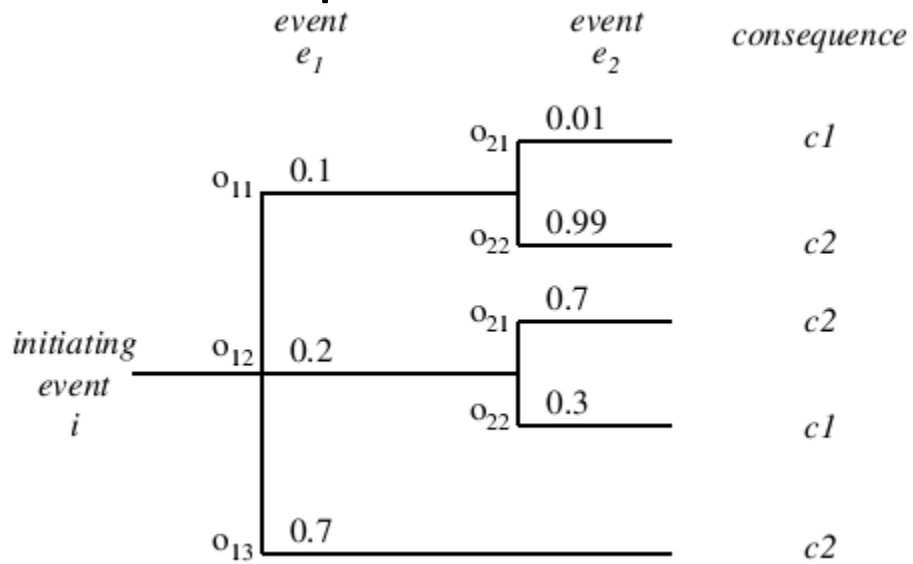
- Events are binary events (operating/not-operating)
- Events are statistically independent
- Relationships between events and causes are represented by logical AND and OR gates
- The undesirable event, called Top Event, is postulated and the possible ways for the occurrence of this event are systematically deduced



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Event tree analysis (ETA)

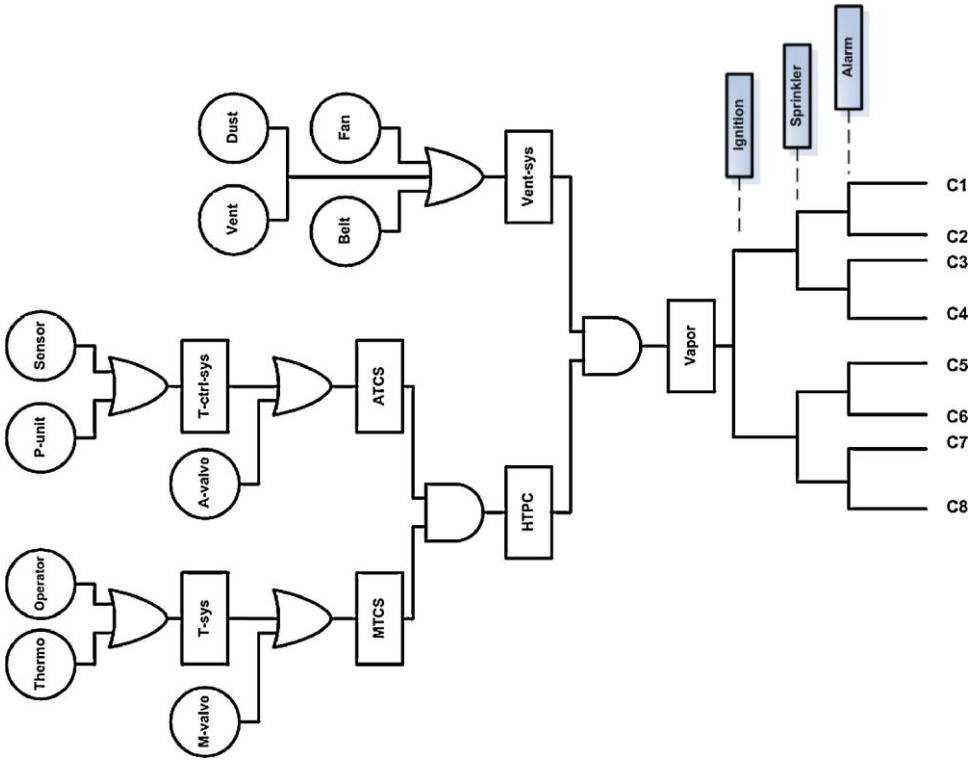
- System evolution following the hazardous occurrence is divided into discrete events
- System evolution starts from an initiating event
- Each event has a finite set of outcomes (commonly there are two outcomes: occurring event or not occurring) associated with the occurrence probabilities
- The leaves of the ET represent the consequence scenarios to be analyzed



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Bow-Tie analysis

- Bow-Tie (BT) combines the scenario modeling and quantification of FT and ET
- It represents an accident scenario from causes to effects



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Bayesian Networks (BN)

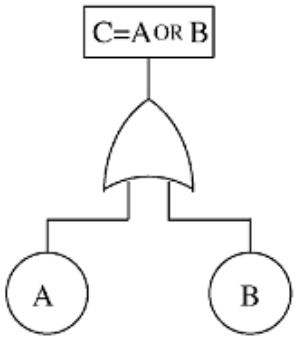
- Also called Bayesian Belief Nets (BBN)
- Formally, a BN is a directed acyclic graph consisting of:
- Nodes $V = \{1, \dots, N\}$, shown as circles, represent random events
- Directed arcs $E \subseteq \{(i,j) | i,j \in V, i \neq j\}$ indicate conditional dependencies among nodes
  - the arc $(i,j) \in E$ which connects node $j \in V$ to node $i \in V$ shows that the event at node j is conditionally dependent to the event at node i

Why Bayesian Networks?

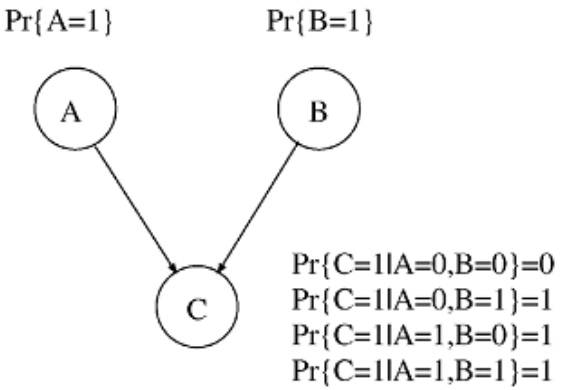
- BNs are probabilistic graphical models, which offers a convenient and efficient way of generating joint distribution of all its events
  - Convenient: causal relationships between events are easy to model
  - Efficient: no redundancies in terms of graphical modelling and probability computations
  - Flexible: capable of handling imprecise information by capturing quantitative and qualitative data
- Wide applicability, for instance:
  - Diagnosis: Microsoft trouble shooting wizard, Medical expert system
  - Classification: Spam email classification
  - Voice recognition

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mapping fault trees into BN

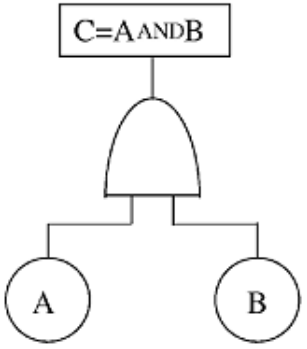


FAULT - TREE: OR Gate

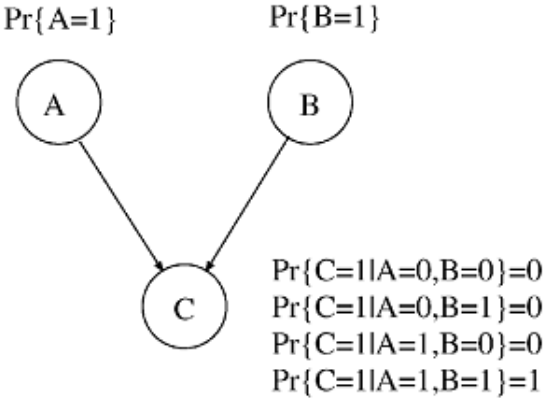


BAYESIAN NETWORK: OR Node

Switching from binary logic to probabilistic logic!



FAULT - TREE: AND Gate



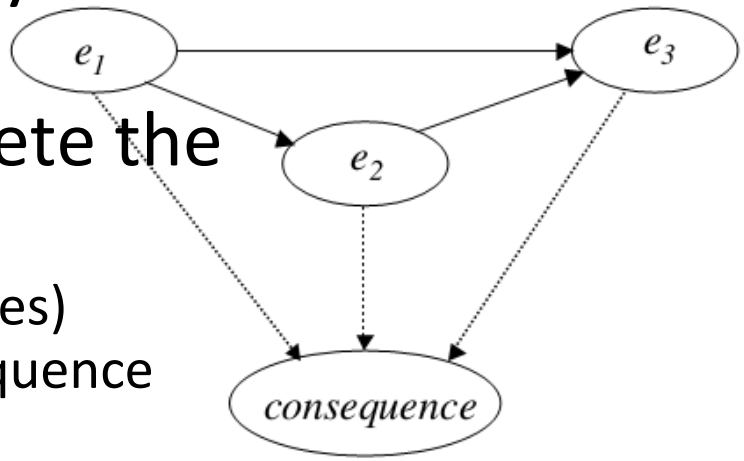
BAYESIAN NETWORK: AND Node

***Reference**:* Bobbio A., Portinale L., Minichino M., Ciancamerla E., "*Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into Bayesian networks",* Reliability Engineering and System Safety 71, pp. 249–260 (2001) .

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mapping event trees into BN

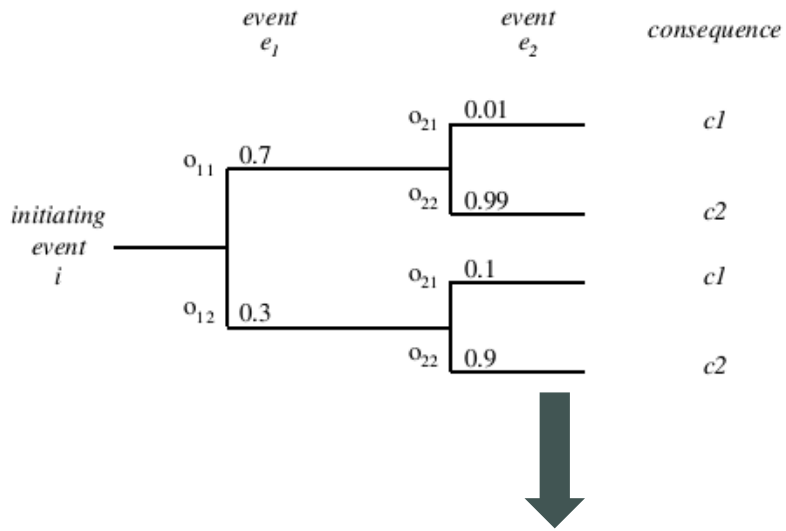
- Any event tree with three events $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, and $\boldsymbol{e_3}$ can be represented by the BN shown below
- Two types of directed arc complete the network:
  - Consequence arcs (shown as dotted lines) connect each event node to the consequence node
    - » This relationship is deterministic: the probability table for the consequence node encodes the logical relationship between the events and the consequences.
  - Causal arcs (shown as solid lines) connect each event node to all events later in time
    - » For instance, event $\boldsymbol{e_1}$ is a causal factor for event $\boldsymbol{e_2}$, thus it influences the probability of event $\boldsymbol{e_2}$.

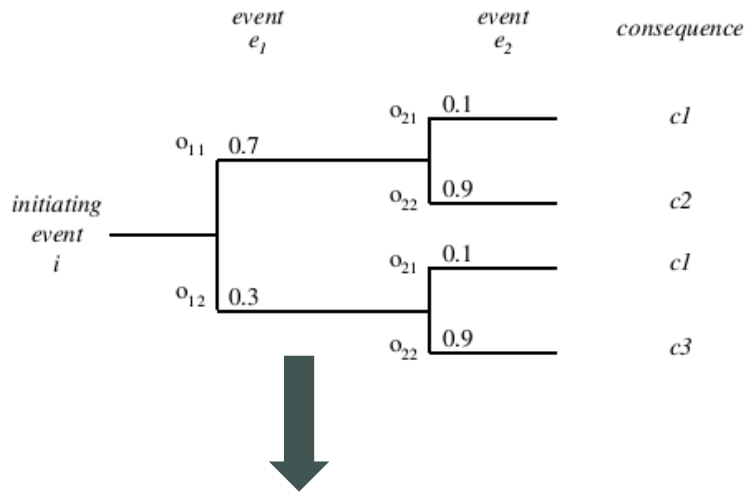


Reference: Bearfield G., Marsh W., *"Generalizing Event Trees Using Bayesian Networks with a Case Study of Train Derailment"*, Computer Safety, Reliability, and Security (2005).

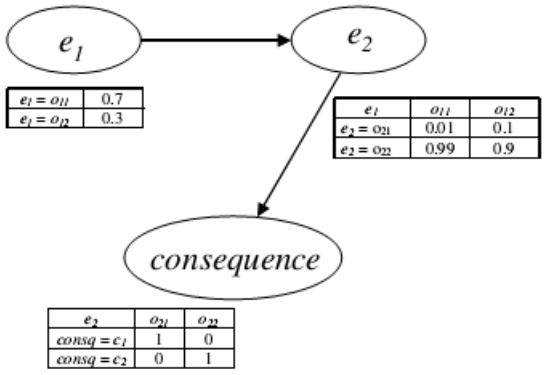
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mapping ET into BN (alternatives)

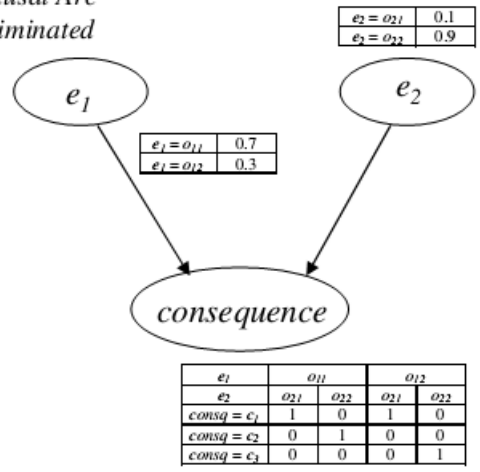




Consequence Arc Eliminated

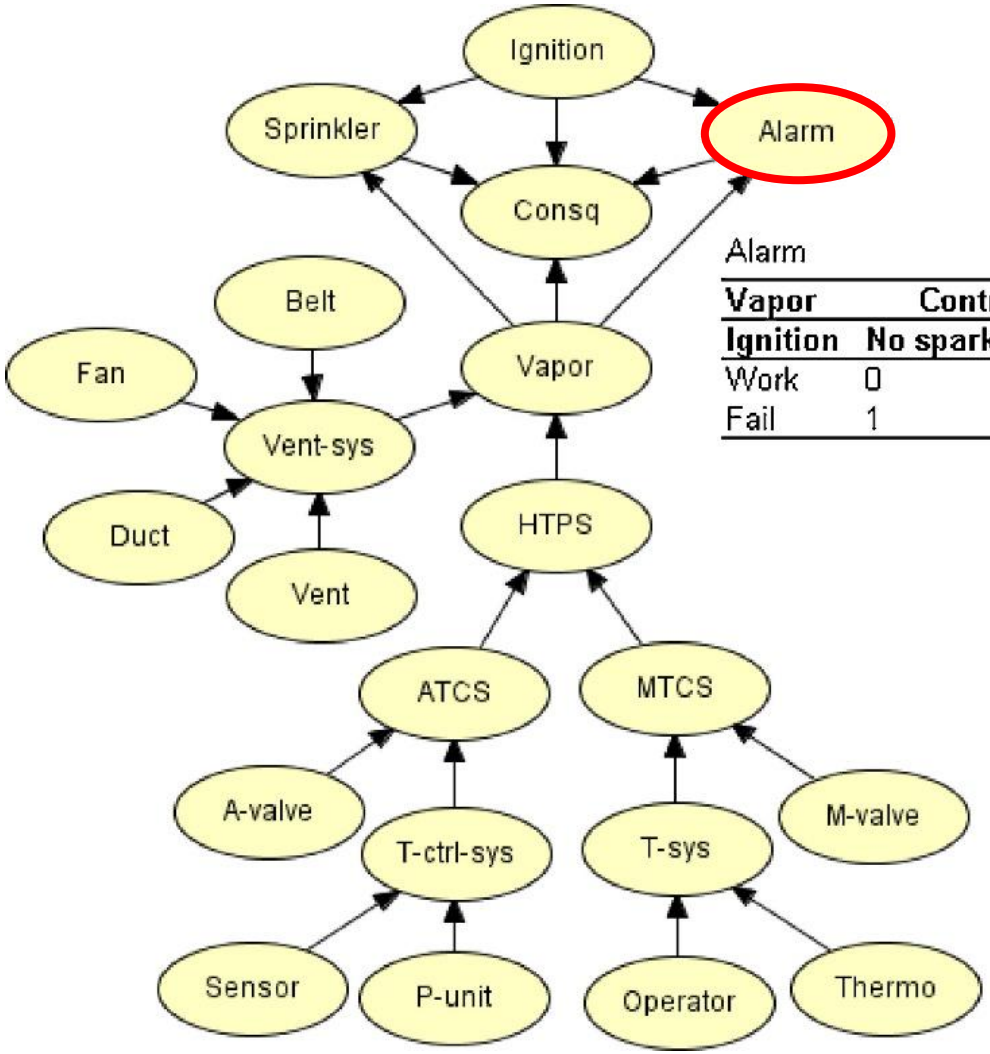


Causal Arc Eliminated



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Advantages of Bayesian Networks



Mapping of Bow Tie (slide 4) into **BN**

Alarm

Vapor	Controlled		Overflow	
Ignition	No spark	Spark	No spark	Spark
Work	0	0	0.775	0.9987
Fail	1	1	0.225	0.0013

Advantages

- Multi-state modelling
- Extension of concepts of AND/OR gates through probability distributions
- Combining expert judgement and quantitative knowledge to estimate the risk

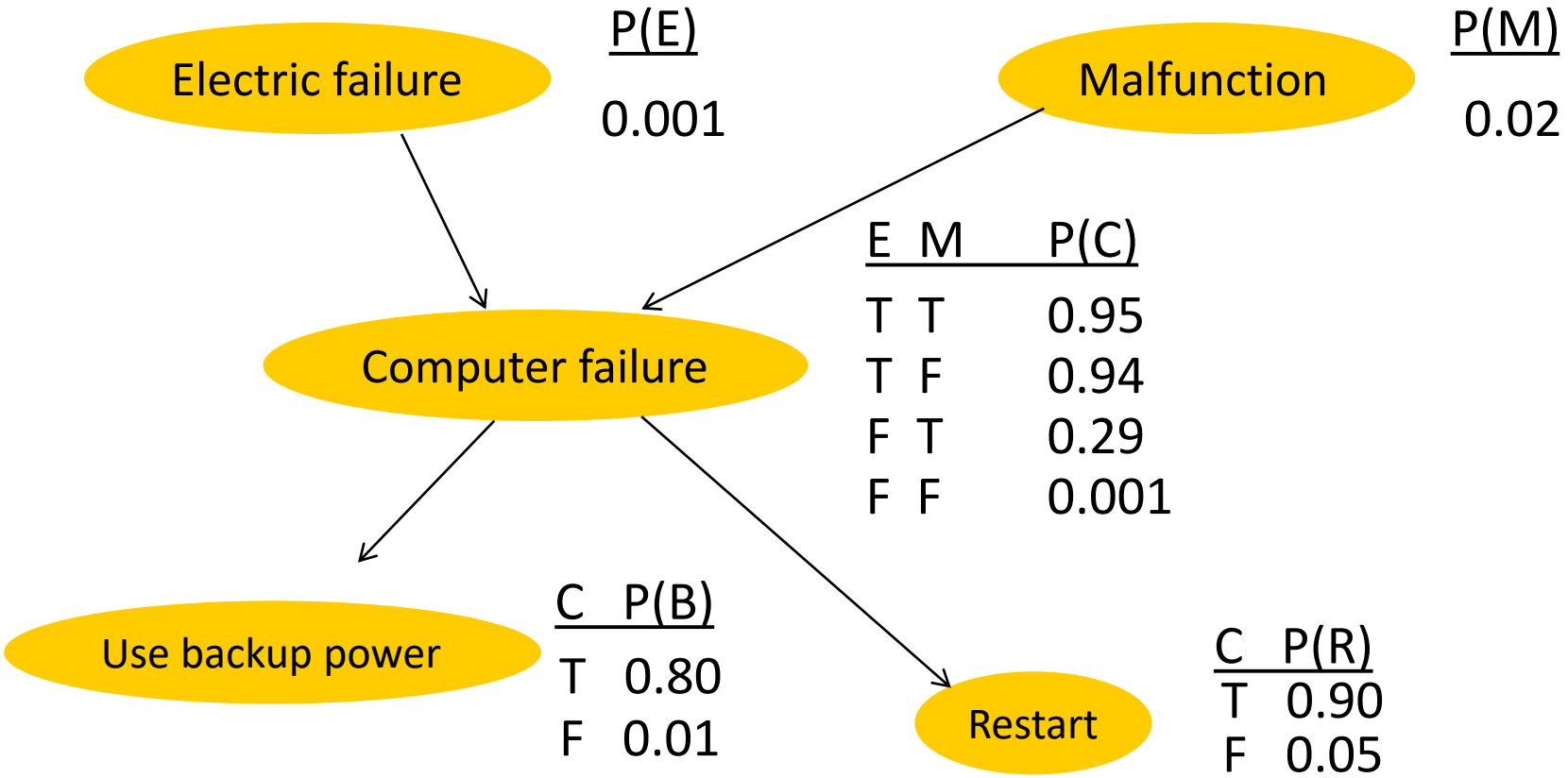
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Failure probabilities

- Information sources
  - Information provided by AND/OR gates
  - Statistical analyses / Simulations
  - Expert elicitation
- The probabilities of events are defined as follows:
  - Initiating events → failure probabilities of system components
  - Intermediate and top events → conditional probability tables (CPT)

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Bayesian Network representation



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

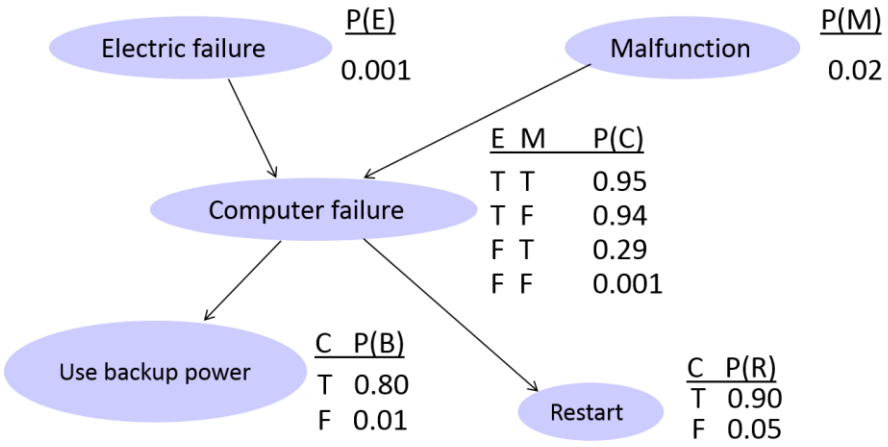
Inference on Bayesian Networks

- Query: Assuming to collect some observations (evidence) from the system, how would this evidence impact the probabilities of the events?
- The conditional probability of a random event given the evidence is known as a posteriori belief, useful in case of:
  - Prediction: computing the probability of an outcome event given the starting condition → Target is a descendent of the evidence!
  - Diagnosis: computing the probability of disease/fault given symptoms → Target is an ancestor of the evidence!
- Note: the direction between variables does not restrict the directions of the queries → Probabilistic inference can combine evidence form all parts of the network!

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Examples of inference: Prediction

- For the computer failure example, what it is the probability that the backup power is working given an electrical failure?



$$P(B|E) = P(B|C)P(C|E) + P(B|\bar{C})P(\bar{C}|E)$$

$$P(C|E) = P(C|\bar{M}, E)P(\bar{M}) + P(C|M, E)P(M)$$

$$P(C|E) = 0.98 \cdot 0.94 + 0.02 \cdot 0.95 = 0.94$$

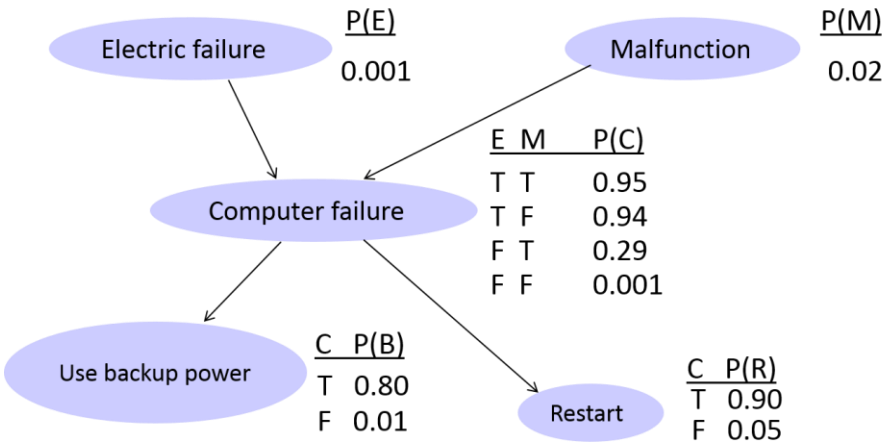
$$P(B|E) = P(C|E) \cdot 0.8 + P(\bar{C}|E) \cdot 0.01$$

$$P(B|E) = 0.94 \cdot 0.8 + 0.06 \cdot 0.01 = 0.75$$

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Examples of inference: Diagnosis

- For the computer failure example, what it is the probability that the electricity is working given a backup power failure?



$$P(E|B) = \frac{P(B|E)P(E)}{P(B)}$$

$$P(E|B) = \frac{0.75 \cdot 0.001}{0.0161} = 0.0468$$

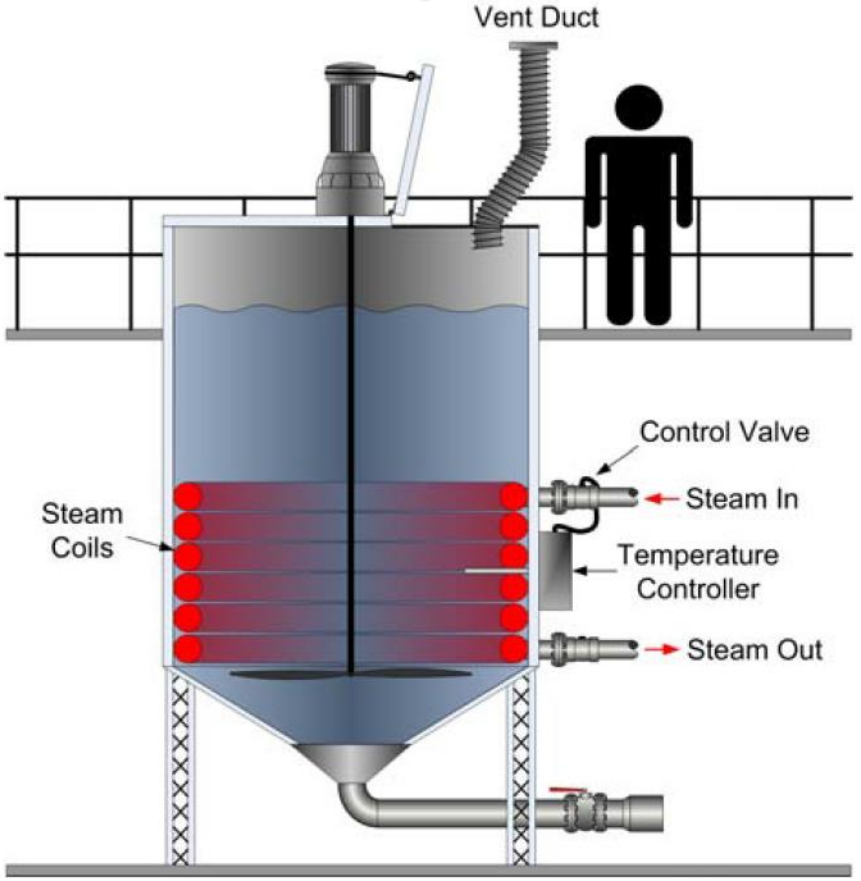
$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|E,M)P(E)P(M) \\ &+ P(C|E,\bar{M})P(E)P(\bar{M}) \\ &+ P(C|\bar{E},M)P(\bar{E})P(M) \\ &+ P(C|\bar{E},\bar{M})P(\bar{E})P(\bar{M}) = 0.0077 \end{aligned}$$

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|\bar{C})P(\bar{C})$$

$$P(B) = 0.8 \cdot 0.0077 + 0.01 \cdot 0.9923 = 0.0161$$

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Illustrative example

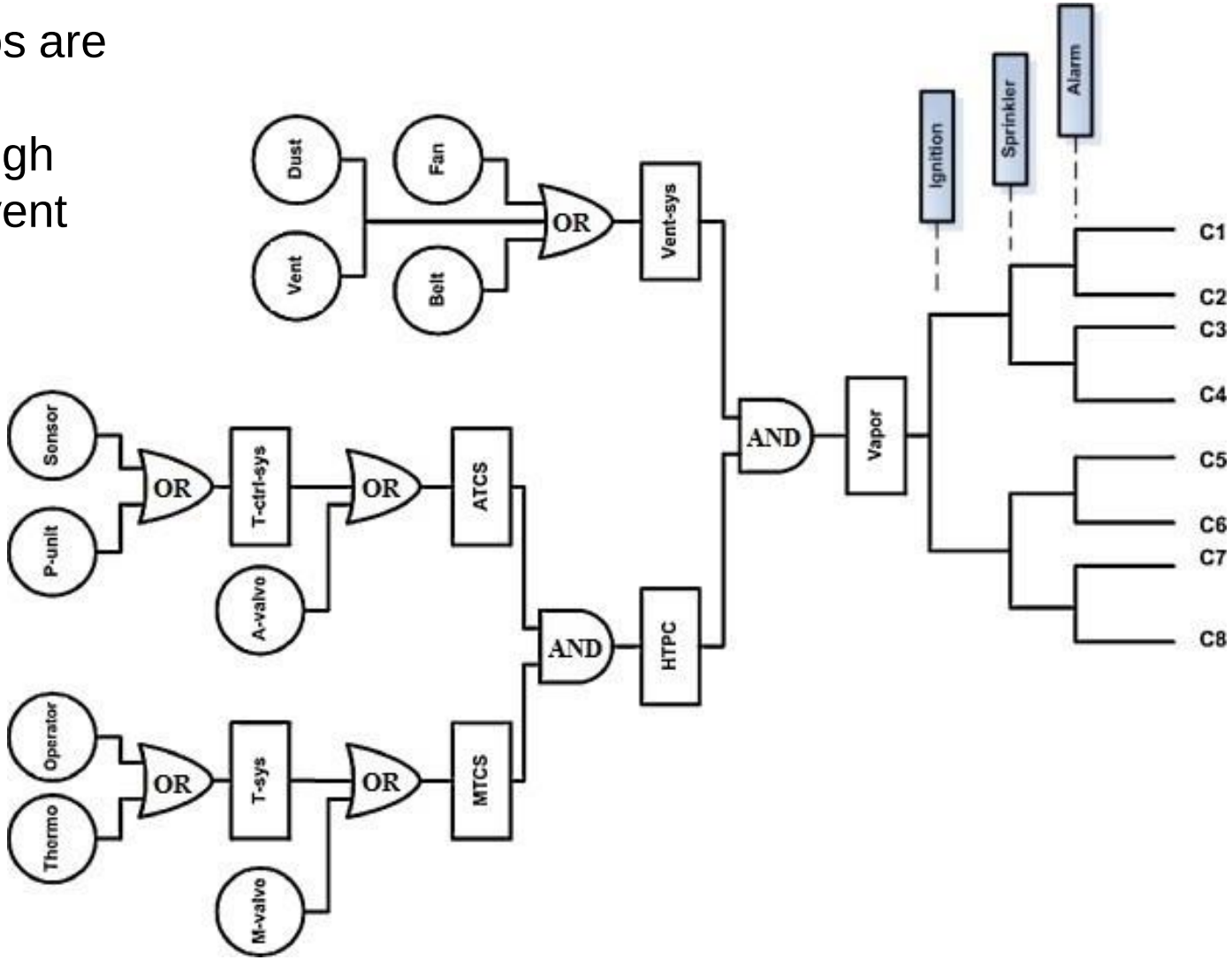


Accident scenario of a **vapor cloud ignition** at Universal Form Clamp in Illinois, US on June 14 2006.

Component	Failure probability
Sensor	0.0400
Pneumatic unit	0.2015
Temperature control system	OR-gate
Operator	0.0200
Infrared thermometer	0.0468
Temperature measurement system	OR-gate
Manual steam valve	0.0243
Automatic steam valve	0.0276
Automatic temperature control system	OR-gate
Manual temperature control system	OR-gate
High temperature protection system	AND-gate
Ventilation	0.0150
Fan	0.0100
Belt	0.0500
Duct	0.0010
Ventilation system	OR-gate
Vapour overflow	AND-gate
Ignition barrier	0.1000
Water sprinkler system	0.040, 0.3000
Alarm system	0.0013, 0.2250

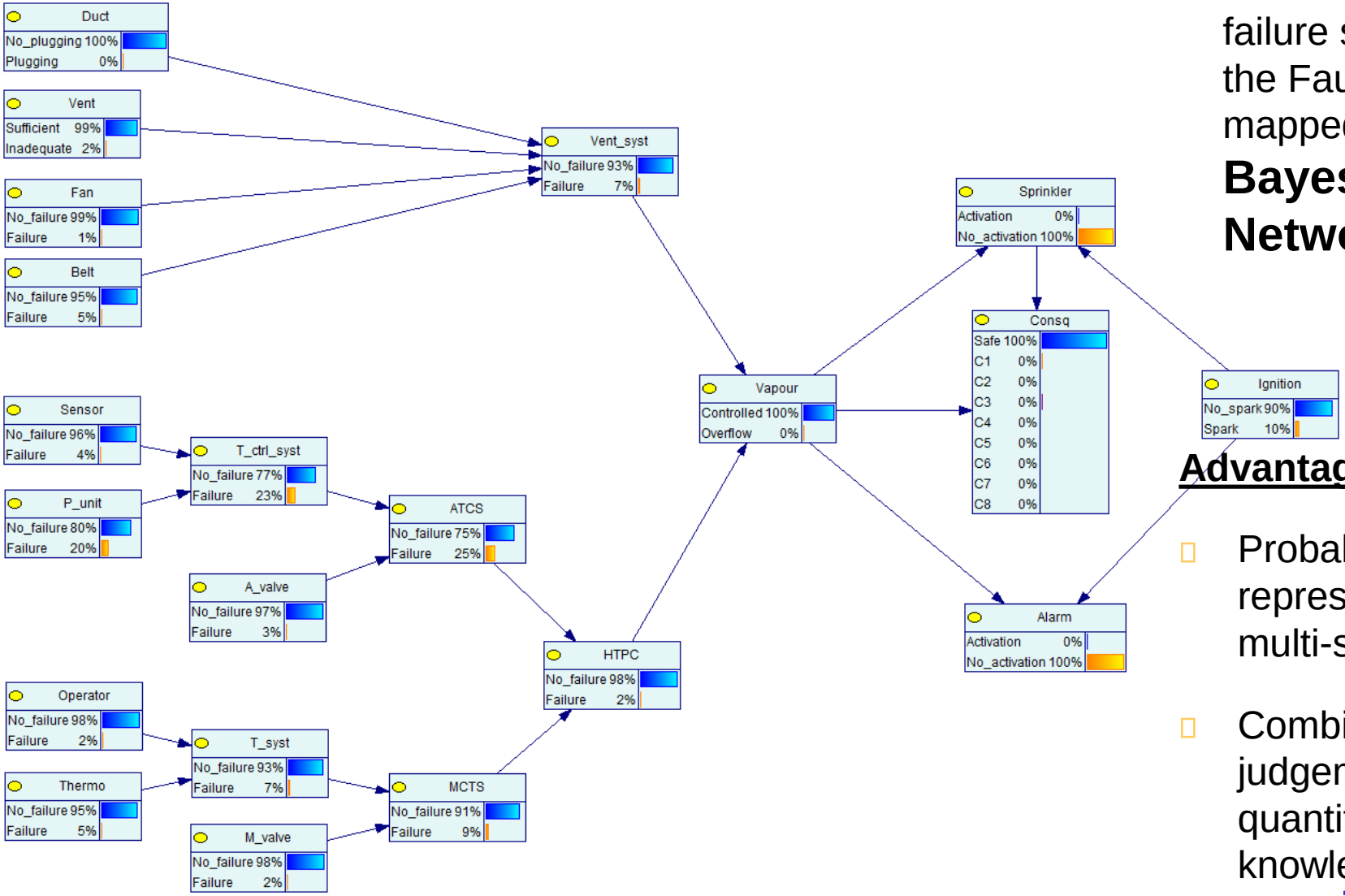
Accident scenarios

Accident scenarios are traditionally represented through Fault Tree and Event Tree



Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Bayesian representation



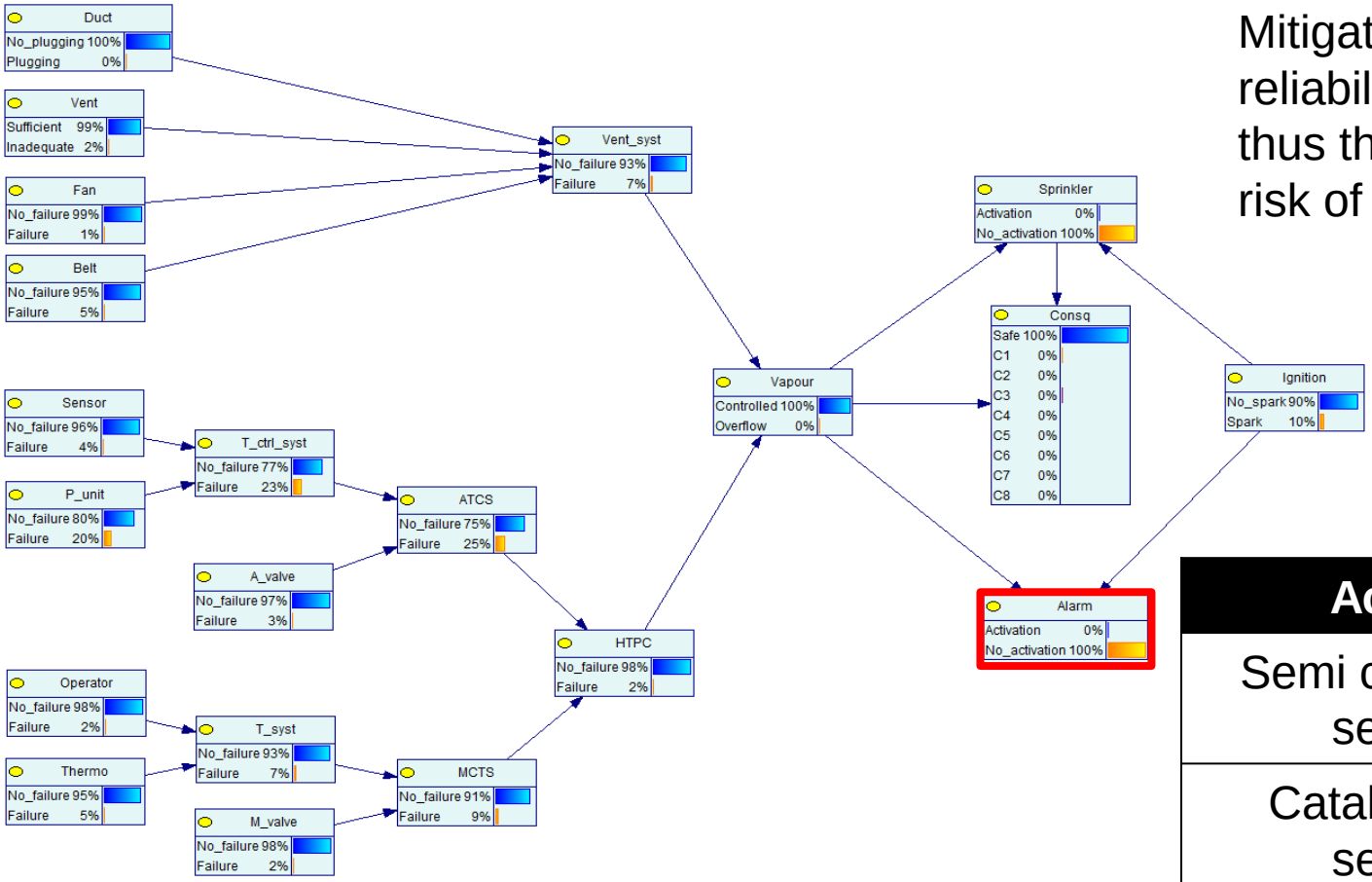
To analyze the failure scenarios, the Fault Tree is mapped into a **Bayesian Network**.

Advantages

- Probabilistic representation of multi-state events.
- Combining expert judgement and quantitative knowledge.

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Definition of mitigation actions



Mitigation actions improve the reliability of the components, thus they mitigate the residual risk of the *overall system*.

Action	Cost	Prob
Semi conductor sensor	60	0.2
Catalytic gas sensor	80	0.15
Electrochemical cells	110	0.1

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Results

Minimum residual risk for the optimal portfolios of actions at different budget levels.

Larger budget
⇒ more effective actions
⇒ lower residual risk of failure

