Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

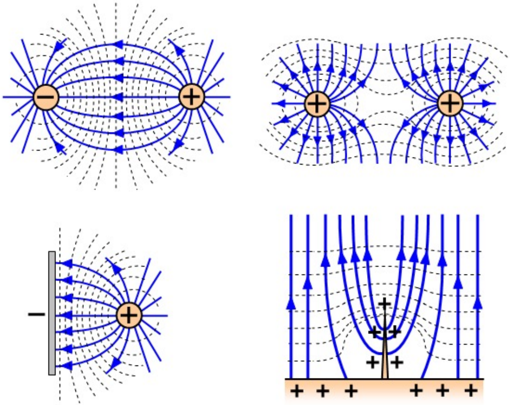
Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 1

Kurssin esittely
- Kurssin toteutus
- Kurssin sisältö

Sähkövaraus ja sähkökenttä
- Oppimistavoitteet
- Sähkövaraus
- Johteet, eristeet ja indusoitunut varaus
- Coulombin laki
- Sähkökenttä ja sähköiset voimat
- Sähkökenttälaskut
- Kenttäviivat
- Sähködipoli
- Yhteenveto



(resourcefulphysics.org)

Kurssin toteutus

Viikkoaikataulu (10 luentoviikkoa + rästi)

	ma	ti	ke	to	pe
8–10				H1	H6
10–12		Luento	Luento	H2	H7
12–14				H3 + etä	H8 + etä
14–16				H4 + sv	
16–18				H5	

Rästiviikolla on laskarit + rästitehtävät, muttei uutta materiaalia tai luentoja.

Mitoitus: 5 op on nimellisesti noin 132 h
$\approx$ luennot 40 h + laskarit 20 h + oma aikaa 72 h

Kurssin suoritus

Esitehtävät	5%	ti 10:00
STACK-tehtävät	15%	pe 20:00
Laskuharjoitukset	50%	pe 20:00
Esseet	25%	
Palautteet	5%	su 23:59
Yhteensä	100%	

Esseet (5 kpl) palautetaan ke 18:00 luentoviikoilla 3, 5, 7, 9 ja rästiviikolla. Merkitse kalenteriin ja aloita ajoissa.

Tarkemmat tiedot:
MyCourses/Kurssin toteutus

Kurssin henkilökunta

Vastuuopettaja Henrik Wallén (Yliopistonlehtori, Elektroniikan ja nanotekniikan laitos)

Assistentit Aada Koivisto, Aaro Kuusinen, Antti Tarkka, Elmo Lepola, Jeremias Pohjola, Jiro Tanabe, Kirill Enckell, Lassi Tammenpää, Nadja Jensen ja Veera Tarkiainen

Laskuharjoitusvuorot MyCoursesissa

Kysy mieluiten luennoilla ja laskareissa, MyCoursesin keskustelupalstalla tai Zulipissa[1]

Henkilökohtaiset kysymykset → `henrik.wallen@aalto.fi`

[1] Pitäisi tulla käyttöön tällä vikkolla. . .

Esitiedot ja jatkokurssit

Esitiedot

- MS-A010x Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
- ELEC-A3110 Mekaniikka
- tai näitä vastaavat tiedot ja taidot

Jatkokurssit

- ELEC-C4140 Kenttäteoria
- ELEC-C3210 Materiaalien ominaisuudet
- ELEC-C3220 Kvantti-ilmiöt
- Monella muillakin pääainekursseilla tarvitaan sähkömagnetismin ymmärrystä vaikkei ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi ole muodollinen esitietokurssi.

Kurssin sisältö

Perusvuorovaikutukset, sähkömagnetiikka ja kentät

Luonnossa esiintyy neljä perusvuorovaikutusta (eli voimaa):

gravitaatiovuorovaikutus arjesta tuttu painovoima – heikoin, mutta merkittävin voima taivaankappaleiden välillä

heikko vuorovaikutus vaikuttaa atomiytimien beetahajoamisessa

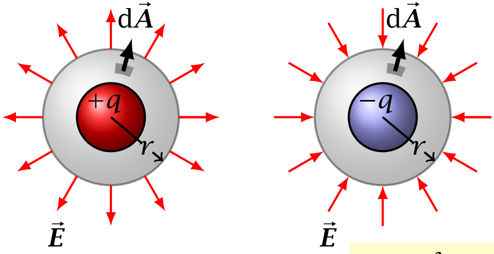
sähkömagneettinen vuorovaikutus merkittävin arjessa koettava vuorovaikutus: atomien ja molekyylien rakenne, kemia, kitka, valo

vahva vuorovaikutus pitää atomiytimet koossa

Voima on fysikaalisesti mitattava suure, jota voidaan mallintaa **kentällä**.

Sähkömagnetiikka tutkii paikoillaan olevien tai liikkuvien varausten synnyttämiä sähkömagneettisia kenttiä

Sähkövaraus ja sähkökenttä

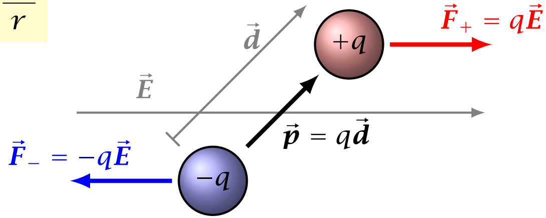


$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

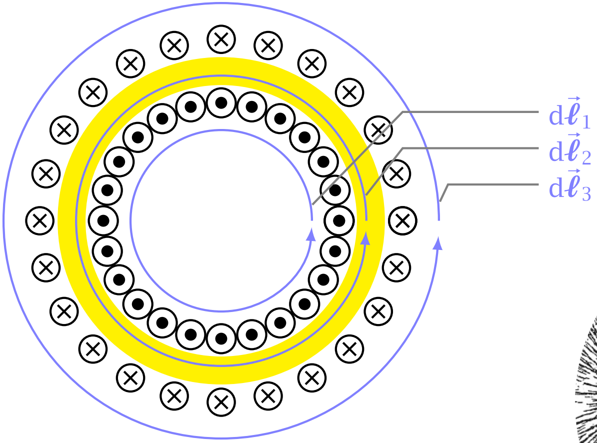
$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0}$$

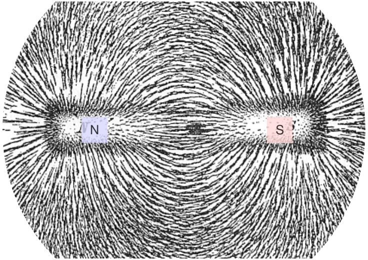
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}q}{r}$$



Virta ja magneettikenttä



Ampèren laki (lävistyslaki)
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}} \implies$ magneetti-kenttää vain keltaisessa alueessa



$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \cos\phi \, dA = \int B_\perp dA$$

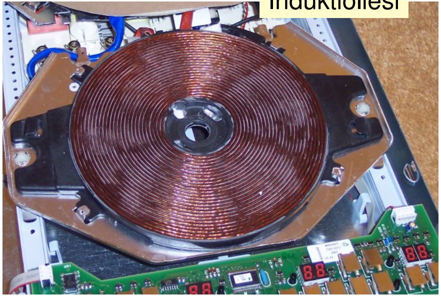
Sähkömagneettinen induktio ja sähkömotorinen voima

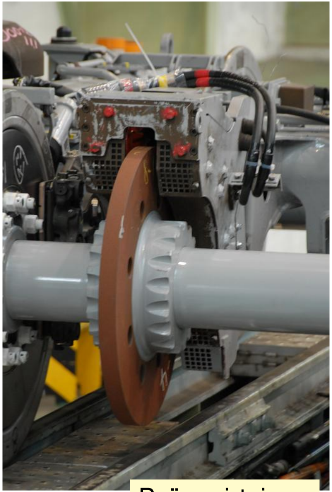
Metallinpaljastin

Metallinpaljastimen, induktiolieden ja pyörrevirtajarrun toiminta perustuu muuttuvan magneettikentän indusoimiin pyörrevirtoihin

Faradayn laki $$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

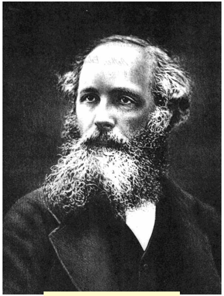
Induktioliesi





Pyörrevirtajarru

Sähkömagneettiset aallot



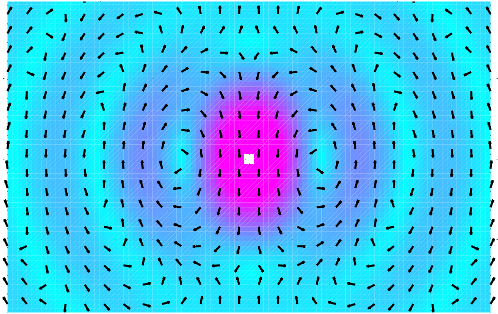
James Clerk Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0} \quad \text{(Gaussin laki)}$$

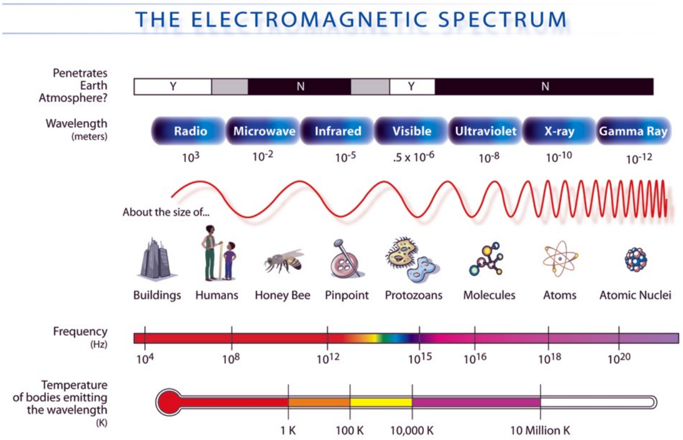
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \quad \text{(Gaussin laki magnetismille)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left(I_{\text{encl}} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \right) \quad \text{(Ampèren laki)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \text{(Faradayn laki)}$$



Sähkömagneettinen spektri



Lähde: `https://mynasadata.larc.nasa.gov/science-processes/electromagnetic-diagram/`

Luentoviikot

1. Sähkövaraus ja sähkökenttä (YF 21)
2. Gaussin laki (YF 22)
3. Sähköpotentiaali (YF 23)
4. Magneettikenttä ja magneettiset voimat (YF 27)
5. Kapasitanssi ja eristeet (YF 24); virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)
6. Magneettikentän lähteet (YF 28)

   (Koeviikolla tauko)
7. Sähkömagneettinen induktio (YF 29) ja induktanssi (YF 30)
8. Sähkömagneettiset aallot (YF 32)
9. Valon luonne ja eteneminen (YF 33)
10. Interferenssi (YF 35) ja diffraktio (YF 36)

\+ Rästiviikko

Sähkövaraus ja sähkökenttä (YF 21)

Tavoitteena on oppia

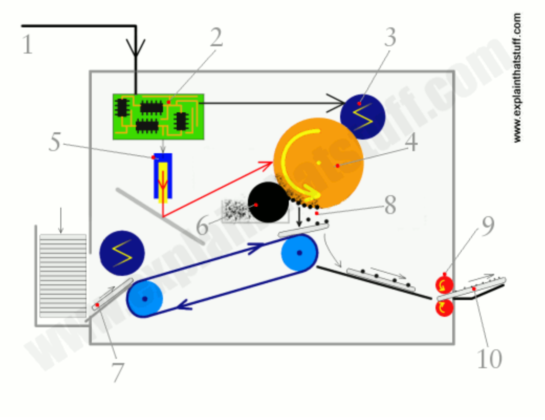
- sähkövarauksen luonne ja varauksen säilyminen
- miten kappaleet tulevat sähköisesti varatuiksi
- miten Coulombin lakia käytetään sähkövarausten välisten voimien laskemiseen
- sähköisen voiman ja sähkökentän ero
- varausjoukon synnyttämän sähkökentän laskeminen
- miten sähkökentän kenttäviivojen ideaa käytetään sähkökenttien kuvaamiseen ja tulkitsemiseen
- laskemaan sähködipoleiden ominaisuuksia

Negatiivinen ja positiivinen sähkövaraus

- Aloitetaan sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen tutustuminen tutkimalla meihin nähden liikkumattomien varausten välistä sähköstaattista voimaa
- Antiikin kreikkalaiset havaitsivat jopa 600 vuotta eaa., että villalla hangattu meripihka vetää esineitä puoleensa (kreikan sana elektron tarkoittaa meripihkaa [engl. amber])
- Jos muovitankoja hangataan turkispalalla, tangot alkavat hylkiä toisiaan
- Jos lasitankoja hangataan silkkikankaalla, tangot alkavat hylkiä toisiaan
- Hangattu muovitanko vetää hangattua lasitankoa puoleensa
- Hankausmateriaali vetää puoleensa tankoa, jota sillä on hangattu
- Benjamin Franklinin perintönä sanomme, että muovitanko varautuu negatiivisesti ja lasitanko positiivisesti [merkit tavallaan väärin valittu. . .]
- Havaitsemme, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja vastakkaismerkkiset vetävät toisiaan puoleensa

Sähköstatiikan sovellus: lasertulostin

1. Kuvadata siirtyy tietokoneesta
2. Ohjauspiiri määrittää, miten data pitää esittää paperilla
3. Ohjauspiiri aktivoi koronalangan, joka . . .
4. . . . varaa valoherkän rummun pinnan tasaisesti positiivisella varauksella
5. Ohjauspiiri liikuttaa peiliä, josta heijastuva lasersäde vaihtaa osumiskohdistaan rummulla varauksen negatiiviseksi
6. Rumpua koskettava mustetela peittää rummun negatiiviset alueet positiivisesti varatuilla mustehiukkasilla; muste peittää nyt oikeat kohdat rummulla



http://www.explainthatstuff.com/laserprinters.html

7. Toinen koronalanka varaa paperilokerosta tulevan arkin vahvasti negatiiviseksi
8. Kun paperi tulee rummun lähelle, positiivisesti varattu muste siirtyy negatiivisesti varatulle paperille; haluttu kuva on keveästi paperissa kiinni
9. Musteinen paperi kulkee kahden kuuman telan välistä (sulatusyksikkö): muste puristuu ja sulaa paperin kuituihin kiinni pysyvästi
10. Vielä lämmin tuloste poistuu kirjoittimesta

Aineen rakenne

- ”Tavallinen” aine koostuu atomeista ja molekyyleistä
- Aineen rakenne ja ominaisuudet ovat pääsääntöisesti seurausta sähköisistä vuorovaikutuksista
- Atomit koostuvat keveistä negatiivisista elektroneista ja raskaammista positiivisista protoneista sekä sähköisesti neutraaleista neutroneista
- Protonit ja neutronit muodostavat tiiviin ytimen (jota vahva vuorovaikutus pitää koossa)
  - Halkaisija luokkaa $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$
- Ydintä ympäröi elektronipilvi (joka pysyy atomissa kiinni sähköisen vetovoiman ansiosta)
  - Ulottuu noin $100\,\mathrm{pm} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$:n päähän ytimestä
- Protonin tai neutronin massa on noin 2000 kertaa elektronin massa (gravitaation vaikutus ei silti atomin rakenteessa näy – miksi?)

Varauksen säilyminen

- Neutraalissa atomissa on yhtä paljon elektroneja ja protoneja
  - koska elektronin ja protonin varaukset ovat yhtäsuuret mutta vastakkaismerkkiset, neutraalissa atomissa nettovaraus on nolla
- Protonien lukumäärä ilmaisee alkuaineen järjestysluvun (atomiluvun, engl. atomic number)
  - Jos poistetaan yksi tai useampi elektroni, saadaan positiivinen ioni [ioni]
  - Negatiivisella ionilla taas on ylimääräisiä elektroneja
  - Nettovarauksen määrä on hyvin pieni ($\sim 10^{-12}$) osa varatun kappaleen kokonaisvarauksesta
- Varauksen säilymislaki (rikkumaton havainto):

Sähkövarausten summa suljetussa järjestelmässä on vakio.

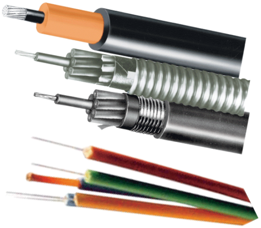
- Sähkövaraus on kvantittunut: havaittava varausmäärä on elektronin (tai protonin) varauksen monikerta (paitsi kvarkeilla, mutta...)
  = elektronin tai protonin varauksen suuruus on luontainen varauksen yksikkö, **alkeisvaraus**

Johteet ja eristeet

Johde Atomien uloimmat elektronit liikkuvat helposti paikasta toiseen materiaalissa (esim. kuparilanka). Tyypillisesti metallit ovat hyviä johteita. Siirtävät varausta paikasta toiseen.

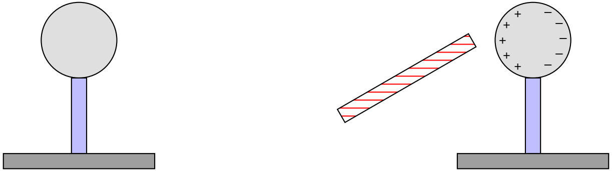
Eriste Aineessa ei ole lainkaan tai on niukasti vapaita elektroneja, jotka voisivat liikkua. Esimerkiksi posliini, muovit, lasi.

Puolijohde Johteen ja eristeen välimuoto. Esimerkiksi galliumarsenidi (yhdiste) ja pii. Aineen seostamisella voi vaikuttaa sen sähköisiin ominaisuuksiin.



Sähköstaattinen induktio

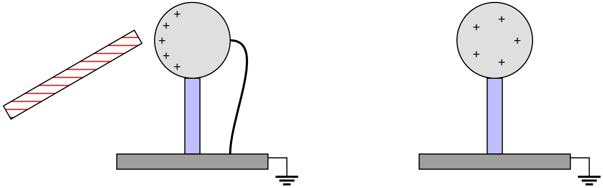
- Varauksia voi siirtää koskettamalla kappaletta varatulla esineellä (esim. koskettamalla metallipalloa varatulla muovisauvalla)
- Entä jos tuodaan negatiivisesti varattu sauva johtavan (ja "irrallisen") metallipallon lähelle koskettamatta sitä?
  - Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan
  - ⇒ pallon vapaita elektroneita siirtyy toiselle puolelle
  - ⇒ sauvan puolelle jää positiivinen nettovaraus
  - = **sähköstaattinen induktio** tai **varaaminen induktion avulla**



Sähkömagneettinen induktio on eri ilmiö, johon palataan luentoviikolla 7.

Sähköstaattinen induktio (jatkoa)

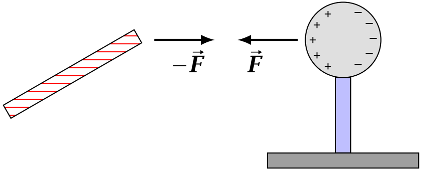
- Metallipallon vapaat elektronit siirtyvät, kunnes syntyy tasapaino
  - = pallon elektroneihin sauvan varauksesta aiheutuva voima on yhtä suuri kuin indusoituneiden varausten elektroneihin aiheuttama voima
- Maadoitetaan pallon oikea puoli
  - ⇒ elektronit siirtyvät pois (maa on ”loputon” varausvarasto)
- Maadoituksen ja sauvan poiston jälkeen palloon jää positiivinen nettovaraus



Varauksien aiheuttama voima

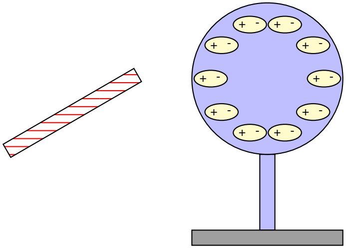
- Varattu kappale aiheuttaa voiman neutraaliin kappaleeseen
- Esim. metallipallo ja negatiivisesti varattu sauva
- Pallon positiiviset varaukset lähempänä sauvaa kuin negatiiviset

$\Longrightarrow$ sauva vetää palloa puoleensa



Polarisaatio

- Varattu kappale siirtää hieman neutraalin eristeenkin varauksia
  - = polarisaatio $\Longrightarrow$ vetovoima
- Vetovoima on sama riippumatta varatun kappaleen varauksen merkistä



Coulombin laki

- Charles Augustin de Coulomb 1784–5:

  > Kahden pistemäisen varauksen välinen voima on verrannollinen varausten suuruksien tuloon ja kääntäen verrannollinen varausten etäisyyden neliöön.

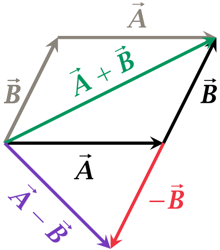
- Aikaisemmin oli havaittu, että samanmerkkisten varausten välillä on hylkimisvoima ja erimerkkisten varausten välillä vetovoima
- Jos pistevaraukset q_1 ja q_2 ovat etäisyydellä r toisistaan, niihin vaikuttavan voiman suuruus

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}}$$

  - verrannollisuuskerroin $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N\,m}^2)$ on **tyhjiön permittiivisyys** (ilma käy yleensä tyhjiöstä); $1/(4\pi\varepsilon_0) \approx 9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\,m}^2/\mathrm{C}^2$
  - $q_{1,2} = n_{1,2}e$, missä alkeisvaraus $e \approx 1.6022 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (yleensä $n_{1,2} \gg 1$)
- Coulombin voimalle pätee **superpositioperiaate** eli voimien vektorisummaus ja Newtonin III laki

Vektorisummaus [kertaus]

Muista, että vektorilla on aina suuruus ja suunta.

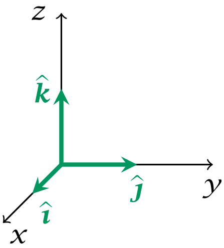


$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

Komponenttimuodossa:

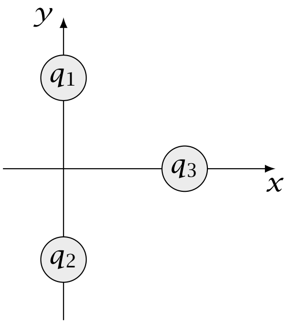
$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}\\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}\\ \vec{A}+\vec{B} &= \left(A_x+B_x\right)\hat{\imath}+\left(A_y+B_y\right)\hat{\jmath}+\left(A_z+B_z\right)\hat{k}\end{aligned}$$



Tällä kurssilla karteesisen eli tavallisen (x, y, z)-koordinaatiston **kantavektorit** ovat $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.

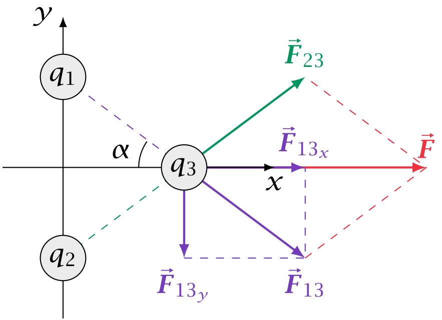
Esimerkki

Kaksi pistevarausta on y-akselilla: $q_1 = 2.0\,\mu\mathrm{C}$ kohdassa $y_1 = 0.30\,\mathrm{m}$ ja $q_2 = 2.0\,\mu\mathrm{C}$ kohdassa $y_2 = -0.30\,\mathrm{m}$. Laske voima, jonka varaukset aiheuttavat varaukseen $q_3 = 4.0\,\mu\mathrm{C}$, kun $x_3 = 0.40\,\mathrm{m}$.



Ratkaisu

Kaksi pistevarausta on y-akselilla: $q_1 = 2.0\,\mu C$ kohdassa $y_1 = 0.30\,m$ ja $q_2 = 2.0\,\mu C$ kohdassa $y_2 = -0.30\,m$. Laske voima, jonka varaukset aiheuttavat varaukseen $q_3 = 4.0\,\mu C$, kun $x_3 = 0.40\,m$.



Voima q_1 kohdistaa q_3

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{13} = F_{13}\,\hat{\boldsymbol{r}}_{13} = 0.29\,\mathrm{N}\,\hat{\boldsymbol{r}}_{13}$$

Komponentit

$$\vec{F}_{13_x} = F_{13}\cos(\alpha)\,\hat{\imath} = 0.23\,\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$
$$\vec{F}_{13_y} = -F_{13}\sin(\alpha)\,\hat{\jmath} = -0.17\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}$$

Symmetrian takia

$$\vec{F}_{23_y} = 0.17\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}, \quad \vec{F}_{23_x} = 0.23\,\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$

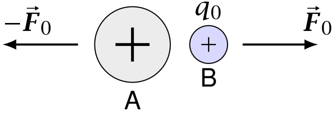
Kokonaisvoima

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 2\cdot 0.23\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} = 0.46\,\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$

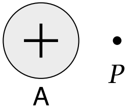
Sähkökenttä

Coulombin lain tulkintaa

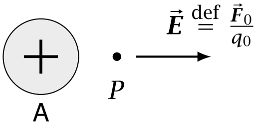
Varaus A aiheuttaa voiman $\vec{F}_0$ pistevaraukseen B



Kun B poistetaan, voidaan ajatella että varaus A tuottaa **sähkökentän** $\vec{E}$ pisteeseen P (varauksen B paikalle)



Jos nyt sijoitetaan pistemäinen testivaraus q_0 pisteeseen P, aiheuttaa sähkökenttä $\vec{E}$ varaukseen voiman, joka on verrannollinen kenttään ja varaukseen: $\vec{F} = q_0\vec{E} = \vec{F}_0$



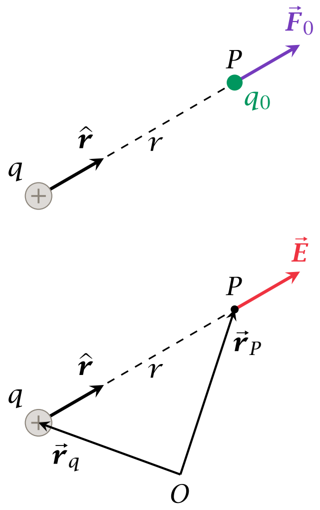
Sähkökenttä (jatkoa)

- Varausten välinen vuorovaikutus (= voima) on todellinen – sähkökenttä on matemaattinen apuneuvo
- Varattuun kappaleeseen kohdistuvan sähköisen voiman tuottaa muiden varattujen kappaleiden synnyttämä sähkökenttä
- Sähkökenttä $\vec{E} \overset{\text{def}}{=}$ testivarauksen q_0 kokema sähköinen voima $\vec{F}_0$ (jonka järjestelmän muut varaukset testivaraukseen kohdistavat) normalisoituna testivarauksella

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}} \qquad [E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

- Sähkökenttä ei riipu voimaa kokevasta varauksesta!
- Jos pisteessä P on sähkökenttä $\vec{E}$, pisteeseen tuotu pistevaraus q_0 kokee voiman $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$

Pistevarauksen sähkökenttä



Testivaraus q_0 pisteessä P kokee Coulombin lain mukaan sähköisen voiman

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

joten pistevarauksen q sähkökenttä $\vec{E}$ pisteessä P on

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

missä r on kenttäpisteen etäisyys pistevarauksesta ja $\hat{r}$ on yksikkövektori, joka osoittaa varauksesta kohti kenttäpistettä. Esim. kuvan paikkavektorien avulla

$$r = \left|\vec{r}_P - \vec{r}_q\right|, \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{\left|\vec{r}_P - \vec{r}_q\right|}$$

Pistejoukon sähkökenttä

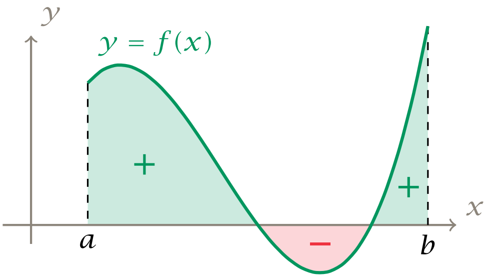
- Edellä laskettiin yksittäisen pistevarauksen aiheuttamaa kenttää
- Useamman varauksen aiheuttama kokonaisvoima $\vec{F}_0$ on vektorisumma yksittäisten varausparien Coulombin voimista $\vec{F}_i$
- Varausjakauman kenttä lasketaan olettamalla tai jakamalla varausjoukko pistelähteiksi
- Kokonaissähkökenttä $\vec{E}_0$ lasketaan yksittäisten varausten kenttien $\vec{E}_i$ vektorisummasta

$$\vec{F}_0 = \sum_i \vec{F}_i = q_0 \sum_i \vec{E}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_0 = \sum_i \vec{E}_i$$

- Jatkuvia varausjakautumia:
  - Viivavaraustiheys $\lambda\ [\mathrm{C/m}]$
  - Pintavaraustiheys $\sigma\ [\mathrm{C/m^2}]$
  - Tilavuusvaraustiheys $\rho\ [\mathrm{C/m^3}]$

Jatkuvan varausjakauman tapauksessa vektorisummasta tulee integraali

Määrätty integraali ja pinta-ala [kertaus]



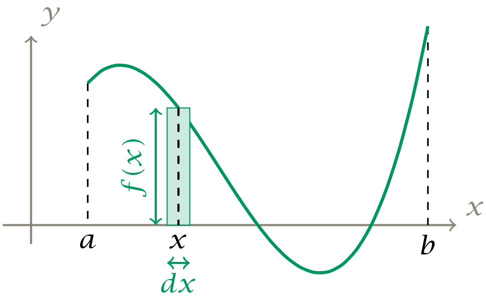
Määrätty integraali

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

on funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala välillä $a < x < b$, missä pinta-ala lasketaan negatiivisena kun $f(x) < 0$ (vaaleanpunainen osa).

Tavallisen määrätyn integraalin laskenta pitäisi olla tuttua Diffis 1 -kurssista, mutta miten tästä saadaan vektorimuotoinen integraali varausjakauman yli?

Geometrinen tulkinta



Pisteessä x otetaan dx-levyinen siivu. Tämän siivun pinta-ala on (likimain)

$$dA = f(x)\,dx$$

Kun koko väli $a < x < b$ jaetaan siivuihin, siivujen pinta-alat summataan ja siivujen leveys $dx \to 0$ saadaan integraali

$$A = \int dA = \int_a^b f(x)\,dx$$

dx = lyhyt mitta x-suunnassa

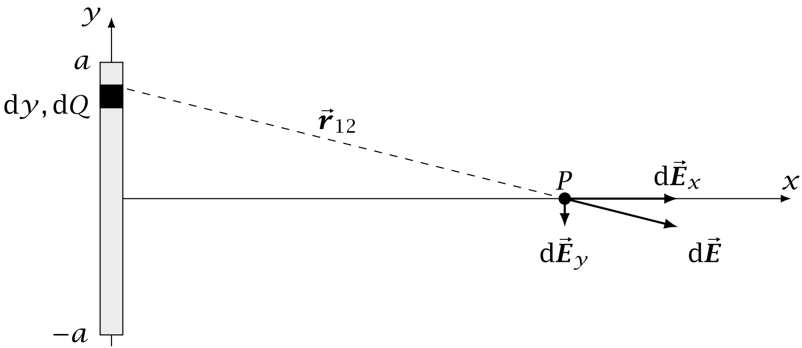
dA = vastaava pieni pinta-ala

Voidaan ajatella, että differentiaali dx on samanlainen pieneksi kutistuva mitta kuin derivaan määritelmässä

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esimerkki

Viivavarauksen kenttä pisteessä P etäisyydellä x origosta



- Jaetaan tasainen viivavaraus $\lambda = Q/(2a)$ paloihin $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}y = \frac{Q}{2a}\,\mathrm{d}y$
- Pisteen P etäisyys palasesta on $r_{12} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ratkaisu

Viivavarauksen kenttä pisteessä P etäisyydellä x origosta

- Kentän voimakkuus (pistelähde)

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r_{12}^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}y}{2a(x^2+y^2)}$$

- Sähkökentän komponentit (trigonometrialla tai yhdenmuotoisilla kolmioilla)

$$\mathrm{d}E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\mathrm{d}y}{2a(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \mathrm{d}E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\,\mathrm{d}y}{2a(x^2+y^2)^{3/2}}$$

- Integroidaan sauvan yli

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{symmetrian vuoksi}$$

Viivavarauksen kenttä

- Vektorimuodossa (huomaa suuntien määrittely)

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} - E_y\hat{\jmath} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\hat{\imath}$$

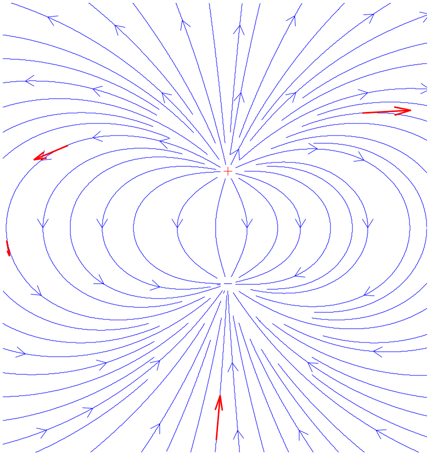
- Jos $x \gg a$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$ (kuten pistevarauksella)
- Jos $Q = 2a\lambda$, $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x/a)^2+1}}\hat{\imath}$
- Ääretön lanka (tärkeä lähdeprototyyppi)

$$a \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{\imath} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\,,}$$

missä r on etäisyys langasta ja yksikkövektori $\hat{r}$ osoittaa langasta poispäin

Sähkökentän kenttäviivat

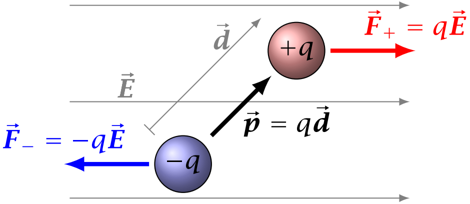
- Sähkökenttää ei voi ”nähdä”
- Kenttää voi havainnollistaa piirtämällä kenttävektoreita (punaiset) tai **kenttäviivoja** (virtausviivoja, siniset)
- Kenttäviivan tangentti osoittaa sähkökenttävektorin suuntaan joka pisteessä ja kenttäviivojen tiheys on verrannollinen kentän voimakkuuteen
- Kenttäviivat ovat yksikäsitteisiä: eivät leikkaa toisiaan
- Kenttäviiva ei ole vakiokenttäkäyrä eikä kuvaa kenttään päästetyn varauksen liikerataa!



(Katso myös kuva sivulla 2.)

Sähködipoli

- Sähködipolissa on kaksi yhtäsuurta mutta vastakkaismerkkistä pistevarausta ($+q$ ja $-q$) etäisyydellä d toisistaan
- Tulo $qd = p$ on **dipolimomentti;** dipolimomenttivektori $\vec{p}$ osoittaa [määritelmän mukaan] negatiivisesta varauksesta positiiviseen päin
- Dipoleilla voi mallintaa aineiden sähköistä vastetta
- Esim. vedellä on pysyvä dipolimomentti ($p_{H_2O} \approx 6.13 \times 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$) $\Longrightarrow$ hyvä liuotin $\Longrightarrow$ vesiliuosten kemia mahdollinen (elämä)
- Jos dipoli asetetaan tasaiseen ulkoiseen sähkökenttään $\vec{E}$, sähködipoliin kohdistuu voima $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \vec{0}$ (ei nettovoimaa)



Sähködipoliin kohdistuva vääntömomentti

- Voimapari $\vec{F}_{\pm}$ ei vaikuta samaa suoraa pitkin, joten dipoliin kohdistuu vääntömomentti
- Kummankin voiman varsi on $(d/2)\sin\phi$, jos ϕ on sähkökenttävektorin ja dipolimomenttivektorin välinen kulma ($\phi = 0 \implies$ vektorit samansuuntaiset)
- Kummankin voiman vääntömomentti dipolin keskikohdan suhteen on

$$\vec{\tau}_{\pm} = \vec{r} \times \vec{F}_{\pm} = (\pm\vec{d}/2) \times (\pm q\vec{E}) = \frac{1}{2}\vec{p} \times \vec{E},$$

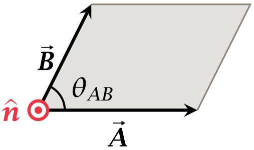
joten kokonaisvääntömomentti $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{+} + \vec{\tau}_{-}$ on

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \implies \tau = pE\sin\phi$$

- Momentti pyrkii aina kääntämään dipolin sähkökentän suuntaiseksi

Ristitulo (= vektoritulo = ulkotulo) [kertaus]

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}\, AB \sin\theta_{AB} = -\vec{B} \times \vec{A}}$$



missä $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A(B \sin\theta_{AB})$ on harmaan suunnikkaan pinta-ala ja $\hat{n}$ on suunnikkaan normaalivektori oikean käden säännön mukaisesti (tässä kohti katsojaa)

Komponenttimuodossa

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\imath} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$$

Sähködipolin potentiaalienergia

- Sähkökenttä tekee työn $\mathrm{d}W$, kun dipoli kääntyy kulman $\mathrm{d}\phi$:

$$\mathrm{d}W = \tau\,\mathrm{d}\phi = -pE\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$$

(miinusmerkki: kenttä kääntää dipolia pienenevän kulman ϕ suuntaan)

- Kokonaistyö

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE\sin\phi)\;\mathrm{d}\phi = pE\cos\phi_2 - pE\cos\phi_1$$

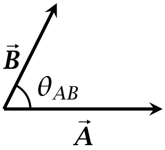
- Työ on potentiaalienergian negatiivinen muutos: $W = U_1 - U_2$; valitaan sähködipolin potentiaalienergiaksi $U(\phi) = -pE\cos\phi$ ja tunnistetaan lausekkeessa pistetulo

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

- Esim. ruohonsiemenet ulkoisessa sähkökentässä polarisoituvat (saavat dipolimomentin) ja asettuvat pitkin kenttäviivoja (minimipotentiaalienergian asentoon)

Pistetulo (= skalaaritulo = sisätulo) [kertaus]

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta_{AB}}$$



$$(0 \leq \theta_{AB} \leq \pi)$$

Komponenttimuodossa

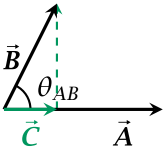
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Vektorin pituus (= suuruus = itseisarvo) ja yksikkövektori

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}, \qquad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vektorin $\vec{B}$ komponentti vektorin $\vec{A}$ suunnassa

$$\vec{C} = \hat{A}\,(B\cos\theta_{AB}) = \hat{A}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \hat{A}\left(\hat{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}\,\vec{A}$$



(Muualla käytetään usein merkintää $\vec{B}_A$ tälle ns. projektiovektorille.)

Kolmitulot [kertaus]

Skalaarikolmitulo, eli vektorien $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ virittämän suuntaissärmiön suunnistettu tilavuus

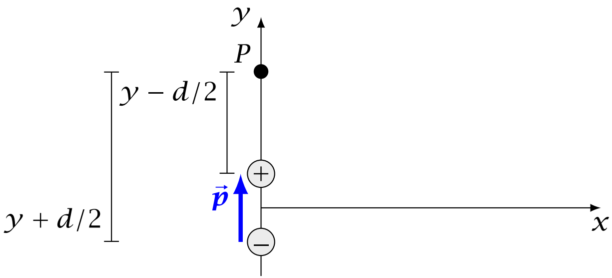
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Vektorikolmitulo

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

("bac-cab" sääntö)

Sähködipolin kenttä y-akselilla pisteessä P



Sähkökenttä P:ssä on $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}$, nyt $E_x = E_z = 0$ (miksi?):

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(y-d/2)^2} - \frac{1}{(y+d/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\left[\left(1-\frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2y}\right)^{-2}\right]$$

Sähködipolin kenttä y-akselilla pisteessä P (jatkoa)

- Jos $y \gg d$, voidaan approksimoida

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \ldots$$

$$\implies \quad \left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \approx 1 + \frac{d}{y} \quad \text{ja} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{d}{y}$$

$$\implies \quad E_y \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\left[\left(1+\frac{d}{y}\right) - \left(1-\frac{d}{y}\right)\right] = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$$

- Siis $E_y \propto 1/y^3$, ja yleisesti etäisyydellä r kaukana dipolista $E \propto 1/r^3$
- Vertaa: pistevarauksen $E \propto 1/r^2$

Yhteenveto luvusta 21

Keskeisiä käsitteitä

- (sähkö)varaus [esim. pistevaraus q]
- varauksen säilymislaki
- johde ja eriste
- sähköinen voima $\vec{F}$ ja sähkökenttä $\vec{E}$
- superpositioperiaate
- sähködipoli ja dipolimomentti p

Tärkeitä kaavoja

Coulombin laki (muista myös voiman suunta)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Pistevarauksen sähkökenttä ja sähköinen voima

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \vec{F}_0 = q_0\vec{E}$$

Sähködipolille

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$