Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

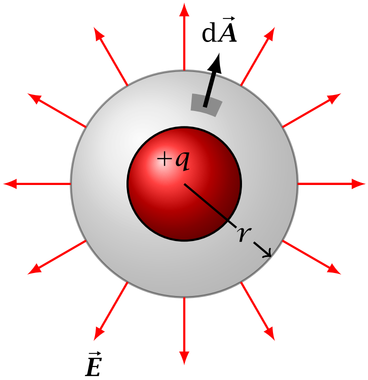
Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 2

Gaussin laki (YF 22)

- Oppimistavoitteet
- Varaus ja sähkövuo
- Sähkövuon laskeminen
- Gaussin laki
- Gaussin lain sovelluksia
- Varatut johdekappaleet
- Yhteenveto



Tavoitteena on oppia

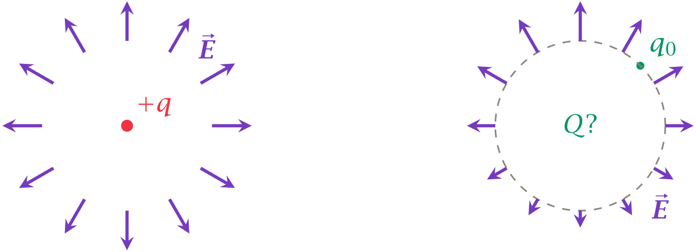
- miten määritetään pinnan sisällä olevan sähkövarauksen määrä tutkimalla sähkökenttää pinnalla
- mitä sähkövuo tarkoittaa ja miten vuo lasketaan
- miten Gaussin laki yhdistää suljetun pinnan läpi tulevan sähkövuon ja pinnan sisään jäävän varausmäärän
- miten Gaussin lakia käytetään symmetrisen varausjakautuman sähkökentän laskemiseen
- missä varatun johteen sähkövaraus majailee

Sähkövarauksen määrittämisestä

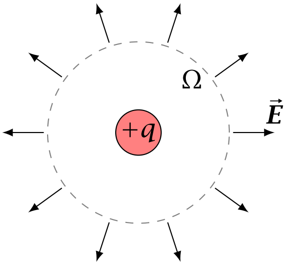
Aiemmin laskettiin sähkökenttä tunnetusta varausjakaumasta, esim. pistevarauksen q sähkökenttä

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

Entä toisin päin: Miten otetaan selville varaus, jos sähkökenttä tunnetaan? (Ja voisiko taidosta olla hyötyä?)



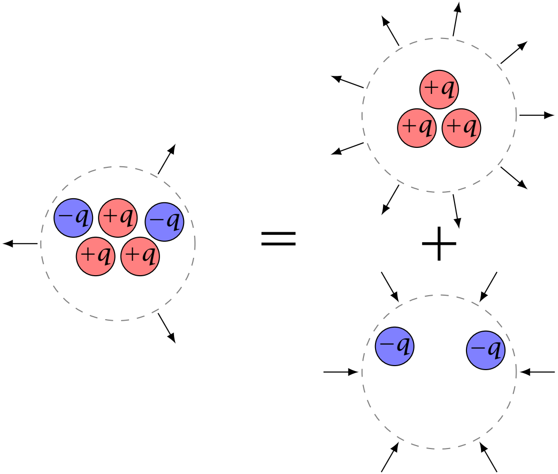
Sähkövuo ja pinnan sisään suljettu varaus



- Ympäröidään tuntematon varaus kuvitteellisella pinnalla kokonaan
- Kuvitteellinen pinta ei vaikuta kenttään
- Jos kenttävektorit osoittavat pinnalla poispäin, sanomme, että **sähkövuo** pinnan läpi on positiivinen (kuin neste virtaisi tilavuudesta pois); jos kenttävektorit osoittavat pinnalla sisäänpäin, sähkövuo on negatiivinen (sisäänvirtaus)
- Jos tilavuudessa ei ole nettovarausta, sähkövuo on nolla
- Jos lähteet ovat pinnan ulkopuolella, sähkövuo pinnan läpi on nolla
- Sähkövuo on verrannollinen pinnan sisällä olevaan nettovaraukseen – pinnan koko ei vaikuta (kunhan varausmäärä pysyy samana)

Nettosähkövuo

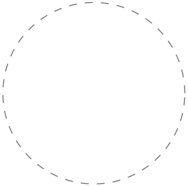
Useamman varauksen yhteiskenttä tai -vuo lasketaan superpositiolla (huom.: tässä nuolien määrä on tärkeä; suunnat ja pituudet ovat viitteelliset)



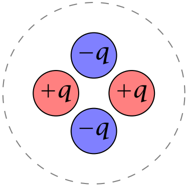
Kentän vuo ulospäin

Kentän vuo sisäänpäin

Nettosähkövuo jatkoa



Ei varausta sisällä

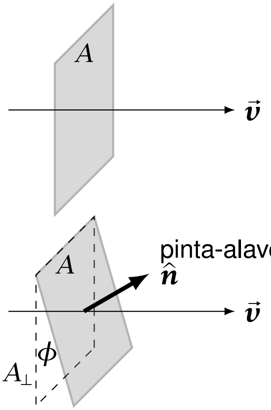


Nettovaraus nolla

- Nettovaraus nolla $\implies$ nettovuo nolla
- Nettovuo suoraan verrannollinen tilavuudessa olevaan nettovaraukseen
- Tilavuus ei vaikuta

Nestevirtausanalogia

Tilavuusvirta (engl. volume flow rate) pinnan A läpi



Tilavuusvirta $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = v\,A$

pinta-alavektori $\vec{\boldsymbol{A}} = A\hat{\boldsymbol{n}}$

Tilavuusvirta $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = v\,\underbrace{A\cos\phi}_{=A_\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$

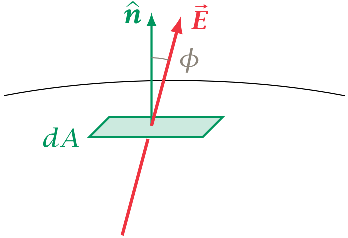
Sähkökentän vuo pinnan läpi

- Rinnastetaan sähkökentän vuo ja nestevirtausanalogian tilavuusvirta
- Tasaisen sähkökentän $\vec{E}$ vuo suunnatun pinnan (engl. vector area) $\vec{A} = A\hat{n}$ läpi on

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A\hat{n},$$

  missä $\hat{n}$ on pinnan normaalivektori ja A on laakean pinnan pinta-ala
- Vuo on verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrään
- Jos sähkökenttä ei ole vakio, kokonaisvuo saadaan integroimalla
- Vuo pienen pinta-alkion $\mathrm{d}\vec{A} = \hat{n}\mathrm{d}A$ läpi on $\mathrm{d}\Phi_E = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$, joten **sähkökentän vuo**

$$\boxed{\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}$$

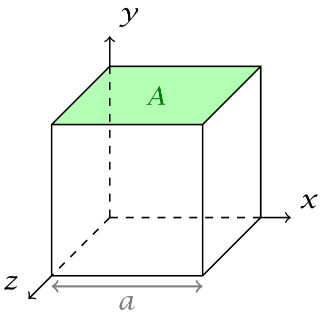


- ”Sähkökentän vuo jaettuna pinnan alalla on yhtä suuri kuin sähkökentän normaalikomponentin keskiarvo pinnalla”

Esimerkki

Laske sähkökentän vuo oheisen a-sivuisen kuution sivun A läpi kuutiosta ulospäin, kun sähkökenttä on

$$\vec{E} = E_0 \frac{x-y}{a} \hat{\imath} + E_0 \frac{y-x}{a} \hat{\jmath}.$$



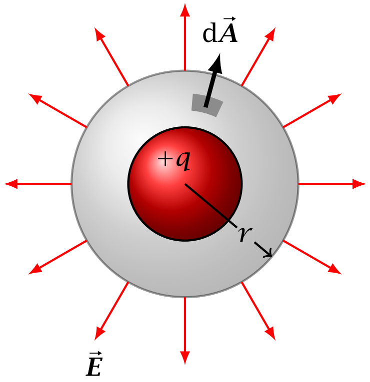
Ratkaisu

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^a \int_0^a \left(+E_0 \frac{a-x}{a} \right) dx\, dz = \frac{E_0 a^2}{2}$$

(Lisäselitys taululla.)

Esimerkki

Laske sähkökentän vuo pistevarausta $q = 3.0\,\mu\mathrm{C}$ ympäröivällä $0.20\,\mathrm{m}$ -säteisellä pallopinnalla.



Nyt $\vec{E} \upuparrows \mathrm{d}\vec{A}$, joten $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = E\,\mathrm{d}A$.
Kenttä on pallopinnalla vakio

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \approx 6.75\times10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}},$$

joten

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = EA \\ &= 6.75\times10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\times4\pi\times(0.20\,\mathrm{m})^2 \\ &\approx 3.4\times10^5\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C}} \qquad \left(\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V\,m}\right)\end{aligned}$$

(Vaikuttiko pallon säde lopputulokseen?)

Pistevaraus pallopinnan sisällä

- Edellisten päätelmien perusteella muotoiltu **Gaussin laki** sanoo, että sähkövuo suljetun pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisällä olevaan nettovaraukseen – täsmennetään verrannollisuus tarkastelemalla kuvitteellista R-säteistä pallopintaa
- Pistevarauksen q kenttä etäisyydellä R on

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

- Nyt $\vec{\boldsymbol{E}} \upuparrows \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$ ja $E =$ vakio pallopinnalla, joten kokonaisvuo

$$\Phi_E = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- Vuo on riippumaton pallon $R > 0$ säteestä, minkä voi päätellä myös tutkimalla erisäteisten samankeskisten pallopintojen läpi kulkevien kenttäviivojen määrää

Gaussin lain yleinen muoto

- Edellistä ajatusta voi jatkaa tilanteeseen, jossa varaus ja kuvitteellinen pallo on suljettu kokonaan mielivaltaisen muotoisen pinnan sisälle: vuo on yhä q/ε_0 (koska jokaisen pintapalan voi projisioida pallolle)
- Kuvitteellinen suljettu tarkastelupinta on nimeltään **Gaussin pinta**
- Jos Gaussin pinnan A sisällä on useita varauksia,

$$Q_{\text{encl}} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$$

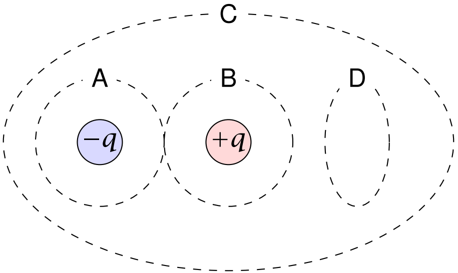
  ja varausten synnyttämät sähkökentät summataan (encl = engl. enclosed, ”pinnan sisällä oleva”)
- Saadaan integraalimuotoinen **Gaussin laki**

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0}}$$

Sähkökentän kokonaisvuo suljetun pinnan läpi on pinnan sisällä oleva nettovaraus jaettuna ε_0:lla.

Esimerkki

Sähkökentän vuo suljettujen pintojen A, B, C ja D läpi



- Pinta A sisältää varauksen $-q$:

$$\Phi_E = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

- Pinta B sisältää varauksen $+q$:

$$\Phi_E = \frac{+q}{\varepsilon_0}$$

- Pinta C sisältää varaukset $+q$ ja $-q$:

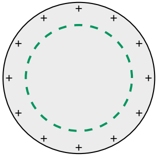
$$\Phi_E = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

  (Miten tämä suhteutuu dipolin sähkökenttään? Dipolin sähkökenttähän on nollasta poikkeava?)

- Pinta D ei sisällä varauksia: $\Phi_E = 0/\varepsilon_0 = 0$ (miksi varauspari ei vaikuta?)

Varatut johteet

- Gaussin laki pätee mille tahansa varausjakaumalle ja mille tahansa suljetulle pinnalle
- Lakia käyttäen voidaan määrittää joko varausjakauma tai sähkökenttä
- **Varatussa johteessa ylimäärävaraus** (vapaa varaus) jakaantuu pelkästään **kappaleen pinnalle,** päättely:



- Sähköstaattisessa tilanteessa varaukset eivät statiikan määritelmän mukaisesti liiku $\iff$ $\vec{F}_{\text{varaukset}} = \vec{0} \implies$ johteen sisällä ei ole kenttää ($\vec{E} = \vec{0}$)
- Kappaleen sisällä olevalle mille tahansa Gaussin pinnalle (katkoviiva) pätee

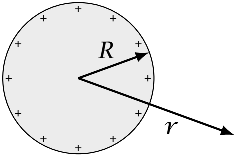
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\varepsilon_0} = 0, \text{ koska } \vec{E} = 0$$

- Siten $Q_{\text{encl}} = 0$ ja varaus voi olla vain johdekappaleen pinnoilla

Gaussin lain käyttäminen

Esimerkki: varatun johdepallon kenttä

*Gaussin lakia voi käyttää **sähkökentän määrittämiseen,** jos probleema on niin symmetrinen, että voidaan helposti valita Gaussin pinta, jolla **sähkökenttä on vakiosuuruinen** ja **kohtisuorassa pintaa vastaan** niillä pinnan osilla, joilla sähkökentän vuo ei häviä.*

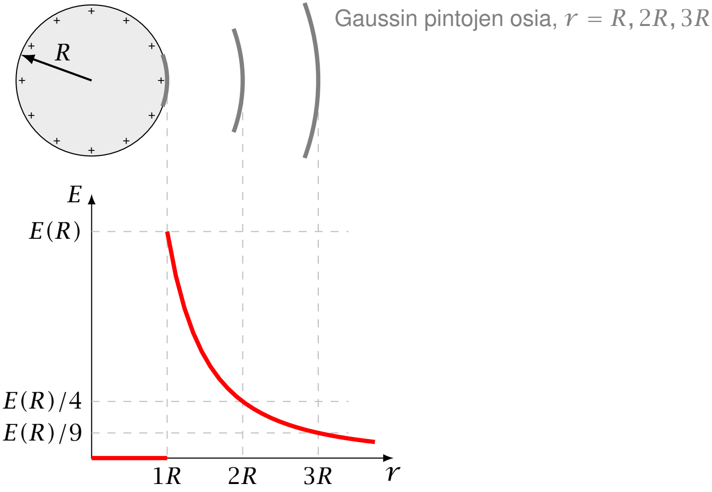


- Johdepallolle annettu varaus (q) asettuu pallon pinnalle, ja pallon sisäsähkökenttä on nolla
- Symmetrian vuoksi varaus on jakautunut tasaisesti ja kenttä on poispäin pallon keskipisteestä (radiaalisuuntainen) sekä vakiosuuruinen r-säteisellä pallopinnalla
- Jos Gaussin pinta on pallo $r > R$,

$$\Phi_E = E \times (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

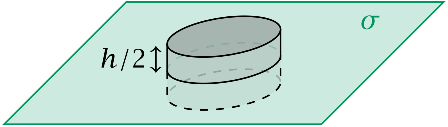
- Johteen pinnalla $r = R$ ja $E(R) = q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$
- Johteen sisällä $r < R$ ja $E = 0$ ($Q_{\text{encl}} = 0$)

Varatun johdepallon kenttä



Tasovarauksen sähkökenttä

Pintavaraustiheys σ tasossa $z = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \pm\hat{\boldsymbol{k}}\,E(z) = ?$



Valitaan Gaussin pinnaksi sylinteri säteellä a ja korkeudella h.

Gaussin pinnan sisäpuolella $Q_{\text{encl}} = \pi a^2 \sigma$.

Sähkökentän vuo Gaussin pinnan läpi on

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{kansi}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{pohja}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{sivu}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

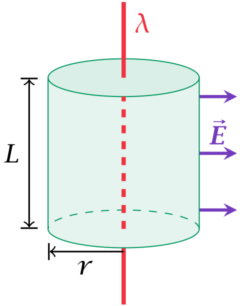
$$= E(h/2)\,\pi a^2 + E(-h/2)\,\pi a^2 + 0 = 2\pi a^2 E$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} & z < 0 \end{cases}$$

Huom: Ääretön taso ja tasainen pintavaraustiheys, $[\sigma] = \mathrm{C/m^2}$.

Viivavarauksen sähkökenttä

Äärettömän pitkä tasainen viivavaraus, jonka varaus pituusyksikköä kohti on λ



Sähkökenttä on symmetrian takia radiaalisuuntainen $\vec{E} = E(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$.

Valitaan Gaussin pinnaksi sylinteri säteellä r ja korkeudella L.

Gaussin pinnan sisäpuolella $Q_{\mathrm{encl}} = \lambda L$.

Sähkökentän vuo Gaussin pinnan läpi on

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{kansi}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{pohja}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{sivu}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$= 0 + 0 + E(r)\,A_{\text{sivu}} = E(r)\,2\pi r L$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

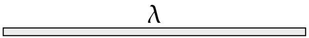
Peruslähteiden kenttiä

Gaussin lain avulla johdettavia lausekkeita

Pistevaraus

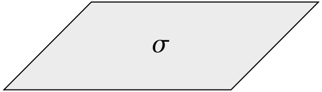
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Ääretön viivavaraus



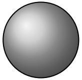
$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Ääretön tasovaraus



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

R-säteinen varauspallo (varauspilvi: tasainen varaustiheys $3Q/(4\pi R^3)$; ei johdepallo [sen sisällä $\vec{E} = \vec{0}$])

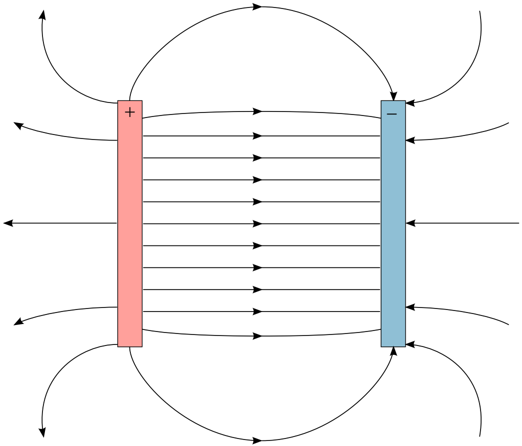


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},\ r > R$$

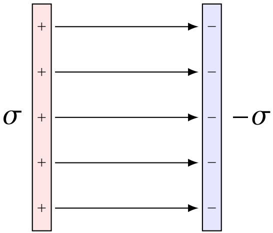
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\hat{\boldsymbol{r}},\ r < R$$

Huomaa: Mitta r on etäisyys varauksesta (niin kuin etäisyys pisteestä tai viivasta tai tasosta määritellään). Tasovarauksen kentän voisi kirjoittaa myös $\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma}{r^0}\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{n}}$. Normaalivektori $\hat{\boldsymbol{n}}$ osoittaa varaustasosta poispäin molemmilla puolilla tasoa.

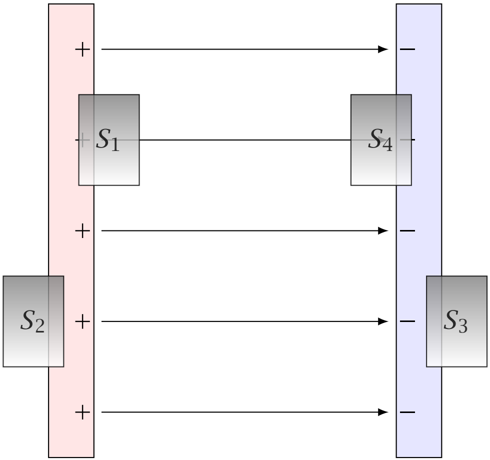
Kahden varatun levyn välinen kenttä



- Kaksi varattua levyä
- Pintavaraustiheydet σ ja $-\sigma$
- Varaukset vetävät toisiaan puoleensa
  - Varaus ja kenttä keskittynyt levyjen sisäpuolelle



Kahden varatun levyn välinen kenttä



- Ideaalitapauksessa levyt jatkuvat äärettömyyteen
  - → S_1 ja S_4: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
  - → S_2 ja S_3: $E = 0$
- Toisaalta varatulle levylle $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- Superpositioperiaate:

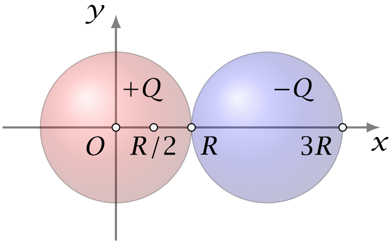
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\imath}$$

levyjen välissä, 0 muualla

Esimerkki

Kaksi varauspalloa

Kaksi tasaisesti varattua palloa ($\pm Q$, säde R). Laske kentänvoimakkuus x-akselilla kohdissa a) $x = 0$, b) $x = R/2$ c) $x = R$ ja d) $x = 3R$



a) $\vec{E}_v = 0,\ \vec{E}_o = \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(2R)^2}\hat{\imath}$

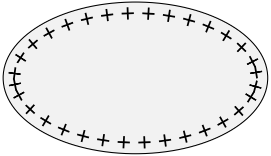
b) $\vec{E}_v = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R/2}{R^3}\hat{\imath},\ \vec{E}_o = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2}\hat{\imath},$

joten $\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_o = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{17Q}{18R^2}\hat{\imath}$

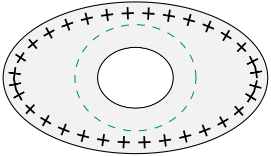
c) $\vec{E}_v = \vec{E}_o = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}\hat{\imath}$, joten $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Q}{R^2}\hat{\imath}$

d) $\vec{E}_v + \vec{E}_o = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(3R)^2}\hat{\imath} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}(-\hat{\imath}) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{8Q}{9R^2}\hat{\imath}$

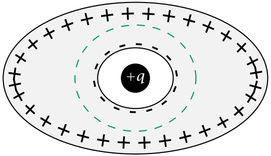
Ontelo johteessa



Nettovarattu johde: johteen sisällä sähkökenttä on nolla ja varaukset ovat johteen pinnalla



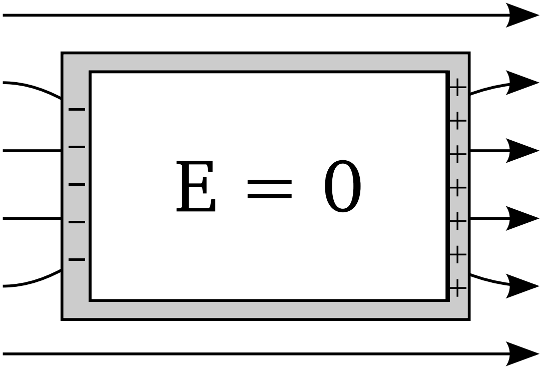
Nettovaratussa johteessa tyhjä ontelo: Gaussin lain mukaisesti ontelon pinnalla ei ole varausta ($Q_{\mathrm{encl}} = 0$, koska $\vec{E} = \vec{0}$)



Nettovaraukseton johde ja ontelossa varaus $+q$: kokonaisvaraus Gaussin pinnan sisällä on nolla (koska $\vec{E} = \vec{0}$) $\Longrightarrow$ ontelon pinnalla on kokonaisvaraus $-q$ ja johteen ulkopinnalla kokonaisvaraus $+q$

Faradayn häkki

- Johtava laatikko tasaisessa sähkökentässä
- Kenttä vetää elektroneja vasemmalle
  $\Longrightarrow$ oikealle syntyy positiivinen pintavaraus
- Tasapainossa varauskertymien välinen sähkökenttä kumoaa ulkoisen kentän täysin häkin sisällä (jotta varauksiin kohdistuva voima on nolla)
- Koaksiaalikaapeli, elektroniikkalaitteiden kuoret, auton kori



- Huomaa:
  - Kuvassa virhe – kenttäviivojen pitäisi osua kohtisuorasti reunoihin
  - Jotta laatikon sisällä mahdollisesti oleva varaus saataisiin piilotetuksi ulkomaailmalta, laatikko pitäisi maadoittaa (miksi?)

Kenttä johteen pinnalla / Johteen reunaehto

- Johteen pinnalla on pintavaraustiheys σ
- Mikä on johteen pinnalla olevan paikallisen sähkökentän $\vec{E}$ ja vastaavan paikallisen pintavaraustiheyden σ yhteys?
- Gaussin pinta = pieni sylinteri (”tonnikalapurkki”), joka on osittain johteen sisällä ja jonka pohja on pinnan suuntainen; pohjan pinta-ala A
- Johteen pinnalla sähkökenttä on kohtisuorassa pintaa vastaan (tasapainotilanne)
- Vuo pinnan A läpi: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E_\perp A$ (Miksi vuo sylinterin kylkien läpi on nolla? Miksi vuo johteen sisällä olevan Gaussin pinnan osan läpi on nolla?)
- Gaussin pinnan sisällä varaus on $Q_{\text{encl}} = \sigma A$
- Gaussin laki:

$$E_\perp A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

= mielivaltaisen johdepinnan paikallinen sähkökenttä

Yhteenveto luvusta 22

Keskeisiä käsitteitä

- Sähkökentän vuo (tai sähkövuo) Φ_E
- Pinnan sisällä oleva nettovaraus Q_{encl}
- Johteessa nettovaraus = pintavaraus
- Faradayn häkki
- Johteen reunaehto ($\vec{E}$ kohtisuorassa johteen pintaa vastaan)

Tärkeitä kaavoja

Sähkökentän vuo

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int E_\perp \, \mathrm{d}A$$

Gaussin laki

$$\boxed{\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_0}}$$