



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 3

Sähköpotentiaali (YF 23)

Oppimistavoitteet

Sähköinen potentiaalienergia

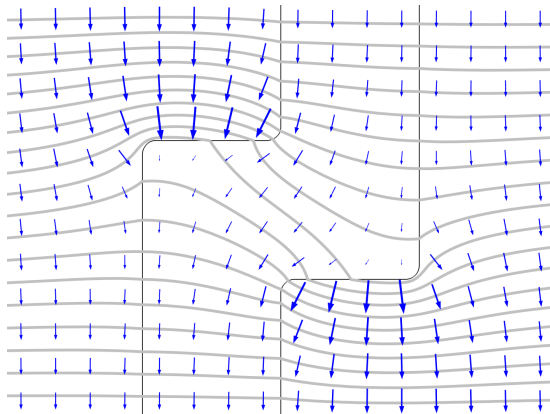
Sähköpotentiaali

Sähköpotentiaalın määrittäminen

Tasapotentiaalipinnat

Potentiaaligradientti

Yhteenveto



Tavoitteena on oppia

- ▶ miten lasketaan varausjoukon sähköinen potentiaalienergia
- ▶ mitä sähköpotentiaali tarkoittaa ja mikä on sen merkitys
- ▶ miten varauskokoelman johonkin avaruuden pisteeseen tuottama potentiaali lasketaan
- ▶ miten tasapotentiaalipintoja käytetään potentiaalिन havainnollistamiseen
- ▶ miten sähköpotentiaalia käytetään sähkökentän laskemiseen

Käsitteitä

Sähkökenttä kohdistaa voiman varattuun hiukkaseen & hiukkanen liikkuu sähkökentässä
⇒ voima tekee työtä hiukkaselle.

- ▶ Varauksen **sähköinen potentiaalienergia** riippuu varauksen paikasta ulkoisessa sähkökentässä (vrt. massa gravitaatiokentässä).
- ▶ Pisteestä **sähköpotentiaali** (eli **potentiaali**) on (testivaraus) sähköinen potentiaalienergia varausyksikköä kohden.
- ▶ **Jännite** on kahden pisteen välinen sähköpotentiaali**ero**.

Mekaniikkaa

Jos voima siirtää kappaleen pisteiden välillä $a \rightarrow b$, **voiman tekemä työ** on viivaintegraali voimasta ja siirtymästä:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Konservatiivisen voiman tekemän työn voi ilmaista **potentiaalienergian** U avulla:

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Huom:

- ▶ Jotta kappale siirtyisi hitaasti tarvitaan ulkoinen vastavoima.
- ▶ Jos konservatiivinen voima tekee positiivista työtä, potentiaalienergia pienenee.
- ▶ Jos ulkoinen voima tekee positiivista työtä konservatiivista voimaa vastaan, potentiaalienergia kasvaa.

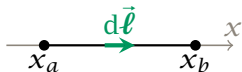
Tällä luennolla tarkastellaan pääosin **konservatiivisen voiman tekemää työtä** (eli sähköisen voiman tai sähkökentän tekemää työtä).

Viivaintegraali

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = ?$$

Differentiaalinen tiealkio $d\vec{\ell}$ on vektori, joka osoittaa integrointitien tangentin suuntaan ja \vec{F} on vektorikenttä.

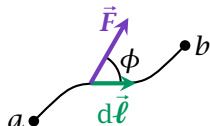
Esim: Integrointitie x -akselia pitkin



$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \cdot \hat{i} dx = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx$$

(Entä jos $x_a > x_b$ tai $y = \text{vakio} \neq 0$?)

Yleinen tapaus:

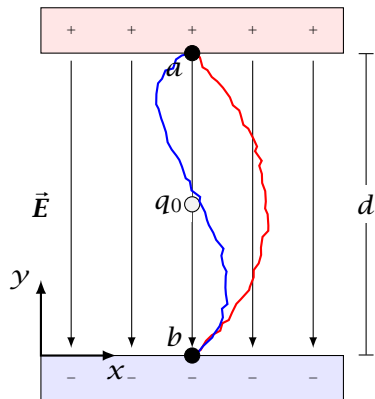


$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b F \cos \phi d\ell$$

Sähköinen potentiaalienergia tasaisessa kentässä

- ▶ Positiivinen varaus q_0 varattujen johdelevyjen välissä
- ▶ Sähkökenttä \vec{E} on homogeeninen
- ▶ Sähkövoima $\vec{F} = q_0\vec{E}$, voimalla on vain y -komponentti: $\vec{F} = -\hat{j}q_0E$
- ▶ Sähkökentän varaukselle tekemä työ on (huomaa: $d\vec{\ell} = +\hat{j}dy$)

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q_0E(b - a) = q_0Ed$$



- ▶ Työ ei riipu polusta \Rightarrow sähkövoima on konservatiivinen \Rightarrow potentiaalienergia $U = q_0Ey$ ja työ $W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = q_0Ed$
- ▶ U pienenee, kun varaus liikkuu voiman $\vec{F} = q_0\vec{E}$ suuntaan

Kahden pistevarauksen sähköinen potentiaalienergia

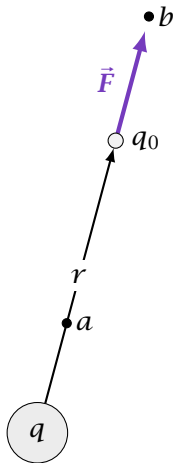
- ▶ Coulombin lain mukaan pistevarauksen q aiheuttama voima testivaraukseen q_0

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

- ▶ q_0 siirtyy $a \rightarrow b$:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot \hat{r} \, dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]$$

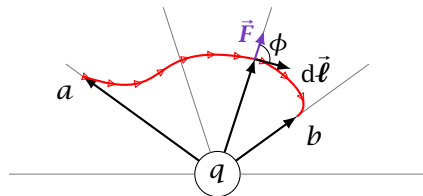
- ▶ Väite: Työ ei riipu reitistä



Kaksi pistevarausta: yleinen tapaus

- Yleisessä tapauksessa

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= \int_{r_a}^{r_b} F \cos \phi \, d\ell \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \cos \phi \, d\ell \end{aligned}$$

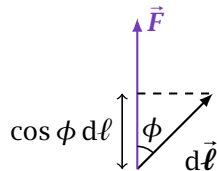


- $\cos \phi \, d\ell = dr$ on siirtymä säteittäissuunnassa

$$\Rightarrow \text{reitistä riippumatta } W_{a \rightarrow b} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right] = U_a - U_b$$

\Leftrightarrow voima \vec{F} on konservatiivinen (m.o.t.)

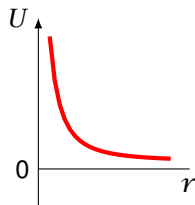
- Koska voima on konservatiivinen, järjestelmän mekaaninen kokonaisenergia (kineettisen ja potentiaalienergian summa) säilyy (toistaiseksi kineettinen energia on ollut nolla = hitaat siirrot)



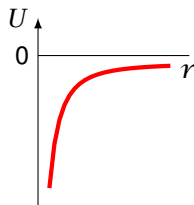
Kahden pistevarauksen potentiaalienergia

Kun testivaraus q_0 on etäisyydellä r varauksesta q , olkoon potentiaalienergia

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (\rightarrow 0, \text{ kun } r \rightarrow \infty)$$



q ja q_0 samanmerkkiset



q ja q_0 vastakkaismerkkiset

Usean pistevarauksen potentiaalienergia

- ▶ Pistevaraukset q_1, q_2, q_3, \dots etäisyyksillä r_1, r_2, r_3, \dots varauksesta q_0
 $\Rightarrow q_0$:n potentiaalienergia

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

- ▶ Jokaisen staattisen varausjakautuman synnyttämän sähkökentän aiheuttama voima on konservatiivinen
- ▶ Koko varausasetelman potentiaalienergia voidaan kirjoittaa muodossa

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

= summaus yli kaikkien varausparien (etäisyydet r_{ij}) siten, ettei varauksen itseisvuorovaikutusta lasketa ($i \neq j$) ja kunkin parin vuorovaikutus lasketaan vain kerran ($i < j$)

Potentiaalienergian tulkitseminen

- ▶ **Tähänastinen lähestymistapa:** Potentiaalienergiaero on sähkökentän varaukselle tekemä työ, $W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b$
 - ▶ Jos $U_a > U_b \Rightarrow W_{a \rightarrow b} > 0$
 - ⇔ Kenttä tekee positiivista työtä, kun hiukkanen "putoaa" matalampaan potentiaaliin
- ▶ **Toinen lähestymistapa:** Tarkastellaan, paljonko työtä **ulkoinen voima** \vec{F}_{ext} tekee ("me teemme") työtä varaukselle, kun ulkoinen voima **siirtää varausta** sähkökentässä \vec{E} **pisteestä b pisteeseen a**
 - ▶ Jottei varaus saa kineettistä energiaa, sitä siirretään hitaasti, jolloin (tasapainotilanteen takia) ulkoinen voima on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen sähkökentän aiheuttaman voiman kanssa
 - ▶ Tällöin **erotus $U_a - U_b$ on ulkoisen voiman varaukselle tekemä työ** (huomaa: voiman suunta ja siirtosuunta ovat aiemmalle vastakkaiset = kaksi miinusmerkkiä = lopputulos samanmerkkinen)
- ▶ Molempia lähestymistapoja käytetään **sähköpotentiaalin** määrittelemisessä

Sähköpotentiaali

- ▶ Normalisoidaan potentiaalienergia U testivaruksella q_0
- ▶ Saadaan potentiaalienergia per testivarausyksikkö eli **sähköpotentiaali** eli potentiaali

$$V = \frac{U}{q_0}$$

- ▶ Yksikkönä voltti, $[V] = \text{J/C} = \text{V}$
- ▶ **Sähkökentän tekemä** työ $W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = q_0(V_a - V_b) = q_0 V_{ab}$, missä V_a on potentiaali pisteessä a ja V_b potentiaali pisteessä b (varaus siirtyy $a \rightarrow b$)
- ▶ V_{ab} on **pisteen a potentiaali pisteen b suhteen** eli pisteiden välinen **potentiaaliero** eli pisteiden välinen **jännite**, tulkinnat:
 - (I) V_{ab} on **sähköisen voiman yksikkövaraukselle** tekemä työ, kun varaus siirtyy $a \rightarrow b$
 - (II) V_{ab} on **ulkoisen voiman yksikkövaraukselle** tekemä työ, kun varaus siirretään sähköistä voimaa "vastaan" $b \rightarrow a$

Sähköpotentiaalin laskeminen

- ▶ Pistevarauksen tuottama potentiaali (ei riipu testivarauksesta q_0)

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

- ▶ Pistevarausjoukon tuottama potentiaali

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(r_i on varauksen q_i etäisyys kenttäpisteestä)

- ▶ Huomaa: Lausekkeiden antama potentiaali häviää, kun etäisyys **kaikista** varauksista kasvaa rajatta; näin **ei ole**, jos varausjakautuma itsessään ulottuu äärettömyyteen (potentiaali ei ehkä häviä)

- ▶ Jatkuvan varausjakautuman tuottama potentiaali

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

(r on varausalkion dq etäisyys kenttäpisteestä)

Potentiaali ja sähkökenttä

- ▶ Sähkökenttä annettu \Rightarrow potentiaali laskettavissa sähkökentästä
- ▶ Sähkökentän tekemä työ

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

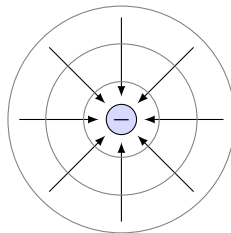
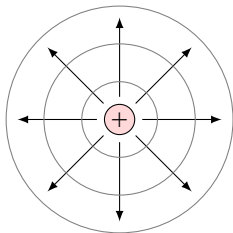
- ▶ Potentiaalिन määritelmästä seuraa potentiaaliero

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

(kun sähköinen voima siirtää varausta)

- ▶ Tulos on integrointireitistä riippumaton

Sähköpotentiaalin käytös



- ▶ Liikutaan kohti lähdettä ($r \rightarrow 0$)
 - ▶ $+q$:ta lähestyttäessä potentiaali kasvaa (on yhä positiivisempi)
 - ▶ $-q$:ta lähestyttäessä potentiaali pienenee (on yhä negatiivisempi)
- ▶ Sähkökenttä osoittaa **pienenevän potentiaalin suuntaan**
- ▶ Sähkökentän yksikkö $[E] = N/C = V/m$ muutos $U_a - U_b = q(V_a - V_B) = qV_{ab}$
- ▶ Jos siirtyvä $q = 1 e$ ja siirtävä $V_{ab} = 1 V$, potentiaalienergian muutos $U_a - U_b = qV_{ab} = 1 eV \approx 1.6022 \times 10^{-19} J$ (energiamitta **elektronivoltti**)

Sähköpotentiaalın määrittäminen

Esimerkki: varatun johdepallon tuottama potentiaali

- Tyypillisesti on [ainakin] kaksi mahdollisuutta määrittää sähköpotentiaali:

- Jos tunnetaan varausjakauma, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$

- Jos tunnetaan sähkökenttä, $V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

- Johdepallolle (säde R) annettu varaus (q) jakautuu tasaisesti pallon pinnalle, pallon sisäsähkökenttä on nolla ja ulkokenttä on ulospäin säteittäinen:

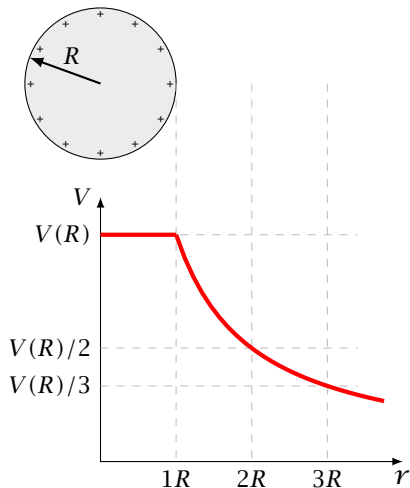
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r > R$$

- Pallon ulkopuolella näkyy **pistelähteen potentiaali**

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R,$$

ja pallon sisällä potentiaali on vakio $V(R) = q/(4\pi\epsilon_0 R)$ (miksi vakio $\neq 0$?)

Varatun johdepallon tuottama potentiaali



Esim: Viivavarauksen potentiaali

Äärettömän viivavarauksen sähkökenttä on

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} = E_r(r) \hat{r}$$

Jos piste a on etäisyydellä r_a ja piste b etäisyydellä r_b saadaan potentiaalieroksi

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_a}^{r_b} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

⇒ voidaan **valita** viivavarauksen potentiaaliksi

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

missä r_0 on mielivaltainen vakio. (Miksi äärettömyyteen ei voida valita nollopotentiaali?)

Tasapotentiaalipinnat ja kenttäviivat

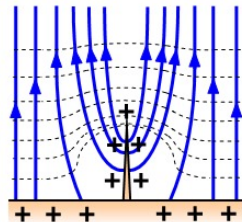
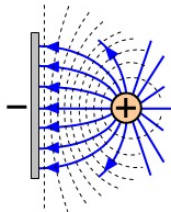
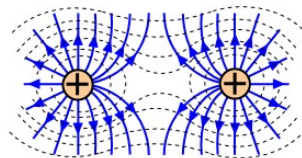
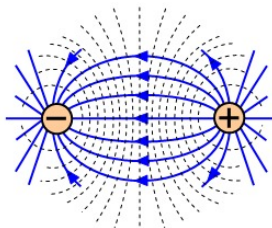
- ▶ Sähkökenttää havainnollistettiin kenttäviivoilla (kuvan siniset viivat)

- ▶ Potentiaalia voi havainnollistaa **tasapotentiaalipinnoilla**

- = pinta, jolla potentiaali on **vakio**
- = kahdessa dimensiossa kartan korkeuskäyrään verrattava viiva (kuvan katkoviivat)

- ▶ Tasapotentiaalipinnat

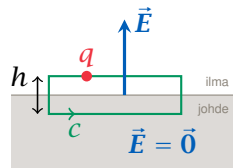
- ▶ **eivät leikkaa** tai kosketa toisiaan (voivat leikata itsensä)
- ▶ ovat **kohtisuorassa kenttäviivoja vastaan**



(resourcefulphysics.org)

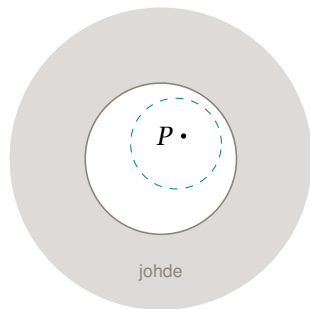
Tasapotentiaalit ja johteet

- ▶ Kun johteen varaukset ovat levossa, **johteen pinta** on **tasapotentiaalipinta**
- ▶ **Sähkökenttä on kohtisuorassa johteen pintaa vastaan**, tuore perustelu:
 - ▶ Johteen sisällä kenttä on nolla
 - ▶ Jos kentässä olisi johdepinnan suuntainen komponentti, johteen pinnan molemmiin puolin suljettua reittiä siirretylle varaukselle tehty työ ei olisi nolla \Rightarrow kyseessä ei olisi konservatiivinen voima
 - ▶ Ristiriidassa lähtötilanteen (sähköstatiikan) kanssa \Rightarrow **johteen pinnalla sähkökentän tangentialikomponentti häviää**
- ▶ Koko **johdekappale on samassa potentiaalissa** ($\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow V_{ab} = 0$)
- ▶ Maa (tai muu suuri **johdekappale**) on **sähkötekniikan mielessä** varausvarasto, joka voi vastaanottaa tai luovuttaa varausta rajattomasti – kyseessä on **sähköinen maa**, ja kytkentä maahan on **maadoitus**; maan tasapotentiaaliksi valitaan yleensä nolla voltia (esim. säätimet ovat niin suuria, että maassakin voi olla potentiaalieroja)



Ontelo johteessa

- ▶ Jos johteessa on varauksia sisältämätön ontelo, ontelon seinämällä ei ole varauksia, tuore perustelu:
 - ▶ Ontelon seinämä on tasapotentiaalipinta
 - ▶ Jos piste P ontelossa olisi eri potentiaalissa kuin seinämä ja jos piste ympäröitäisiin onteloon mahtuvalla Gaussin pinnalla, huomattaisiin, että Gaussin pinnalla on sähkökenttä \Rightarrow Gaussin pinnan sisällä on varausta
 - ▶ Ontelossa ei kuitenkaan ole varauksia, joten ontelossa potentiaalinväly täytyy olla vakio ja kenttä on nolla \Rightarrow pintavaraustiheys ($\sigma = \epsilon_0 E_{\perp}$) on nolla
- ▶ Mieti: tasapotentiaalipinnan ja Gaussin pinnan ero?



Potentiaaligradientti

- ▶ Edellä $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ (a :n potentiaali b :n suhteen)
- ▶ Toisaalta jos summataan infinitesimaaliset potentiaalimuutokset dV jokaisen $d\vec{\ell}$:n kohdalla matkalla b :stä a :han, $V_a - V_b = \int_b^a dV = - \int_a^b dV$
- ▶ **Kaikille** a, b pitäisi päteä $(\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$

$$- \int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad -dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

- ▶ Kun sallitaan yhden muuttujan kerrallaan muuttua, saadaan ratkaistuksi

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

- ▶ **Sähkökenttä** on "potentiaalın negatiivinen gradientti" ja osoittaa **pienenevän potentiaalın suuntaan**

Potentiaaligradientti (jatkoa)

Nabla (∇) on lyhennysmerkintä **vektordifferentiaalioperaattorille**, jolla potentiaaligradientti voidaan merkitä hyvin ytimekkäästi ja koordinaatistoriippumattomasti $\vec{E} = -\nabla V$.

Tavallisessa karteesisessa koordinaatistossa saadaan

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Jos potentiaali $V = V(r)$ riippuu etäisyydestä pallon keskipisteestä tai sylinterin akselista¹ saadaan

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

¹Yleinen gradientti pallo- tai sylinterikoordinaatistossa on mutkikkaampi, mutta sitä ei tällä kurssilla tarvita.

Eri geometrioita

- Pistevaraus

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Varattu sylinteri (säde R)

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R$$

- Renkasvarauksen (säde a) akselilla (x -akselilla)

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Yhteenveto luvusta 23

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Konservatiivinen kenttä (ja voima)
- ▶ Sähköinen potentiaalienergia U
- ▶ (Sähkö)potentiaali V
- ▶ Tasapotentiaalipinta

Tärkeitä kaavoja

Energia ja potentiaali

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b, \quad V = \frac{U}{q_0}$$

Potentiaali ja kenttä

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\nabla V$$

Pistevarauksen potentiaali

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

(+ superpositioperiaate)