



Aalto-yliopisto  
Sähkötekniikan  
korkeakoulu

# ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

# Luentoviikko 5

## Magneettikenttä ja magneettiset voimat (YF 27)

Magnetismi

Magneettikenttä

Magneettiset kenttäviivat ja magneettivuo

Varausten liike magneettikentässä

Liikkeen sovelluksia

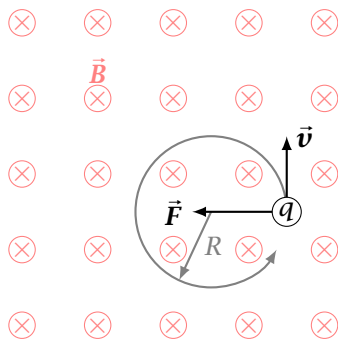
Virtajohdin magneettikentässä

Virtasilmutka magneettikentässä

Tasavirtamoottori

Hallin ilmiö

Yhteenveto



# Tavoitteena on oppia

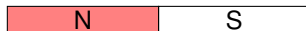
- ▶ magneettien ominaisuuksia ja miten magneetit vaikuttavat toisiinsa
- ▶ magneettikentässä liikkuvaan varaukseen vaikuttavan voiman luonne
- ▶ miten magneettiset kenttäviivat eroavat sähköisistä kenttäviivoista
- ▶ miten analysoidaan magneettikentässä olevan varauksen liikettä
- ▶ miten tutkitaan virtajohtimiin vaikuttavaa magneettista voimaa
- ▶ miten virtasilmukat käyttäytyvät magneettikentässä
- ▶ muutamia magneettikentän käyttökohteita kemiassa ja fysiikassa

# Johdanto

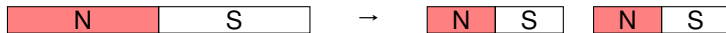
- ▶ Magneettisia voimia käytetään hyödyksi monessa arkipäivän laitteessa
- ▶ Magnetismin olemus on liikkuvien sähkövarausten vuorovaikutus
- ▶ Sähköiset voimat vaikuttavat kaikkiin varauksiin, **magneettiset voimat vain liikkuviin varauksiin**
- ▶ **Magneettikentän** synnyttää **kestomagneetti, virta** johteessa tai **liikkuva varaus**
- ▶ Magneettikenttä välittää **voiman**, jonka jokin toinen **virta** tai **liikkuva varaus** kokee
- ▶ Ensimmäiset havainnot magneettisista ilmiöistä tehtiin (oppikirjan mukaan) vähintään 2500 vuotta sitten Magnesia [ad Sipylumin] kaupungissa (nyk. Manisa) Länsi-Turkissa

# Magnetismi

- ▶ (Kesto)magneetissa on kaksi napaa – kompassin mukaan S–south, N–north



- ▶ Samanmerkkiset navat hylkivät toisiaan, erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa
- ▶ Magneetin navat vetävät puoleensa rautaa sisältäviä ei-magnetisoituja esineitä
- ▶ (Missä tahansa) magneetissa on **aina** kaksi napaa:



- ▶ Maapallolla on magneettikenttä – kenttäviivat kulkevat etelästä pohjoiseen
- ▶ Pohjoisnavalla on S-napa (mitä?)

# Liikkuva varaus ja magneettinen voima

## Sähkökenttä

- ▶ Levossa oleva sähkövarausjakautuma synnyttää sähkökentän  $\vec{E}$
- ▶ Sähkökenttä aiheuttaa voiman  $\vec{F} = q\vec{E}$  varaukseen  $q$
- ▶ Kokeellisesti on havaittu, että magneettikenttä  $\vec{B}$  aiheuttaa nopeudella  $\vec{v}$  liikkuvaan varaukseen  $q$  voiman

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$[B] \stackrel{\text{def}}{=} \text{tesla} = \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2}$$

voiman suunta  $\perp$  (hiukkasen nopeus ja magneettikenttä)

- ▶  $\vec{B}$  on oikealta nimeltään **magneettivuon tiheys**, mutta kurssissa ja kirjassa sitä kutsutaan vain magneettikentäksi

## Magneettikenttä

- ▶ Liikkuva varaus (virta) synnyttää (sähkökentän lisäksi?) **magneettikentän  $\vec{B}$**
- ▶ Magneettikenttä aiheuttaa voiman  $\vec{F}$  liikkuviin varauksiin ja virtoihin

# Elektronisuihku magneettikentässä

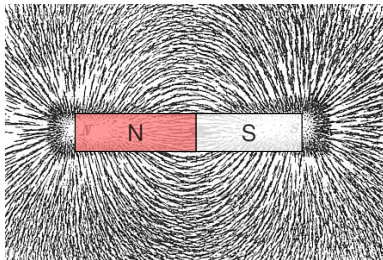
- ▶ Magneettikenttää voidaan tutkia katodisädeputken avulla
  - ▶ Elektronisuihku osuu keskelle kuvaruutua, jos magneettikenttä on elektronisuihkun kanssa yhdensuuntainen
  - ▶ Käännetään putkea (ja elektronisuihkua)  $90^\circ \Rightarrow$  magneettikenttä kääntää suihkua
  - ▶ Kääntymissuunnasta voidaan päätellä elektronin varaus
- ▶ Jos varauksen kohdalla on sähkö- ja magneettikenttä yhtä aikaa, voima

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzin voimalaki

# Kenttäviivat

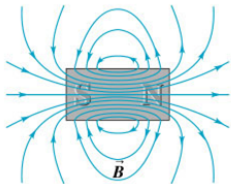
- ▶ Kokeellisesti kenttäviivojen suunta nähdään rautaviilajauholla
  - ▶ Rautahippuset ovat pieniä kompassineuloja magneettikenttään asetettuina (vrt. ruohonsiemenet sähkökentässä)



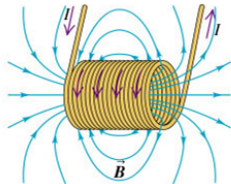
- ▶ Magneettikentän kenttäviivat **eivät ole** voimaviivoja siinä mielessä kuin sähkökentän kenttäviivat (magneettikenttä aiheuttaa voiman vain **liikkuvaan varaukseen eikä** voiman suunta ole kentän suunta)!
- ▶ Magneettikenttävektorit ovat kenttäviivojen tangenteja (kuten sähkökentällä)



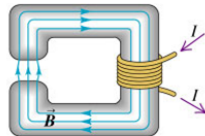
# Eri lähteiden magneettisia kenttäviivoja



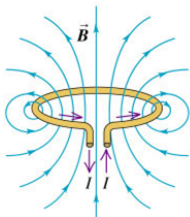
(a) Magnetic field lines through the center of a permanent magnet



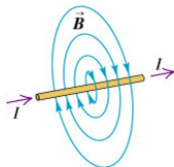
(b) Magnetic field lines through the center of a cylindrical current-carrying coil



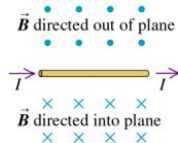
(c) Magnetic field lines through the center of an iron-core electromagnet



(d) Magnetic field lines in a plane containing the axis of a circular current-carrying loop



(e) Magnetic field lines in a plane perpendicular to a long, straight, current-carrying wire



(f) Magnetic field lines in a plane containing a long, straight, current-carrying wire

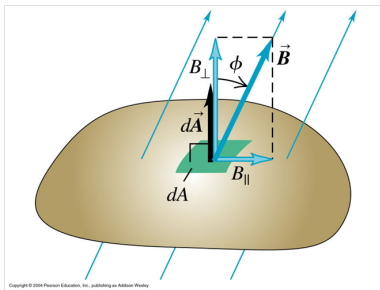
# Magneettivuo

- ▶ Magneettivuo  $\Phi_B$  määritellään kuten sähkökentän vuo
- ▶ Otetaan kuvitteellinen pinta  $A$  ja integroidaan sen läpi kulkeva  $\vec{B}$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B_{\perp} dA$$

magneettivuo

- ▶  $[\Phi_B] \stackrel{\text{def}}{=} \text{weber} = \text{Wb} = [\text{ve:ber}] = \text{T m}^2 = \text{N m/A} = \text{Vs}$



# Gaussin laki magnetismissa

- ▶ Magneettisia monopoleja "ei ole olemassa" (tai ainakaan niitä ei ole **luonnossa** havaittu)
- ⇒ Magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

magnetismin Gaussin laki

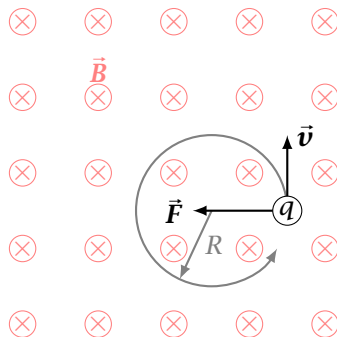
- ⇒ Magneettiset kenttäviivat ovat **suljettuja silmukoita**
- ▶ Jos valitaan tarkastelupinta ( $dA_{\perp}$ ) kohtisuoraan  $\vec{B}$ :tä vastaan,

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_{\perp}}$$

(tästä näkee, miksi  $\vec{B}$ :n oikea nimi on **magneettivuon tiheys**)

# Varauksen liike magneettikentässä

- ▶ Magneettikentän varaukseen aiheuttama voima on **aina** kohtisuorassa nopeutta vastaan
- ▶ Magneettikenttä voi muuttaa varauksen nopeuden **suuntaa**, **ei suuruutta**
  - ⇒ magneettinen voima ei tee työtä varaukselle
  - ⇒ varaus liikkuu **ympyrä-** tai **kierrerataa**



# Syklotronitaajuus

- ▶ Newton II  $\Rightarrow$  magneettinen voima on yhtä suuri kuin keskihakuvoima:

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{ympyräradan säde}$$

- ▶ Varauksen kiertoaika  $T = 2\pi R/v$ , joten kulmataajuus

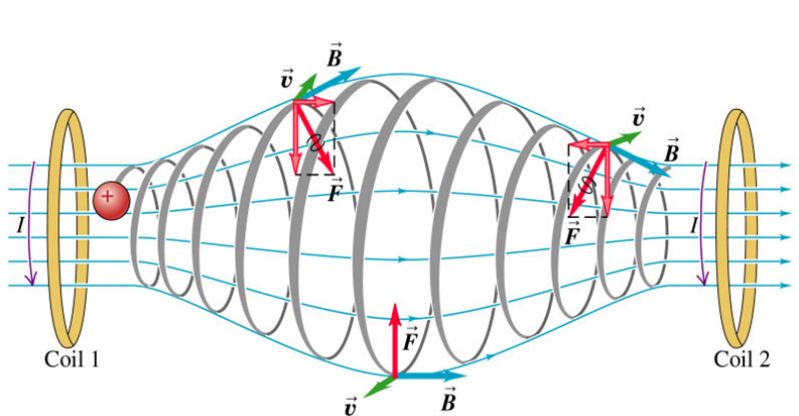
$$\omega = 2\pi/T = v/R = v|q|B/(mv) = |q|B/m \quad (m \text{ on varauksen massa})$$

- ▶ Kulmataajuutta vastaava taajuus  $f = \omega/(2\pi) = |q|B/(2\pi m)$  on **syklotronitaajuus**
- ▶ Esimerkiksi mikroaaltouunin tehonlähteenä käytetty **magnetroni** lähettää mikroaaltosäteilyä taajuudella 2.45 GHz, jolla elektronit kiertävät ympyrärataa tyhjiökammiossa magneetin napojen välissä .

# Epähomogeeninen magneettikenttä

## Magneettinen pullo

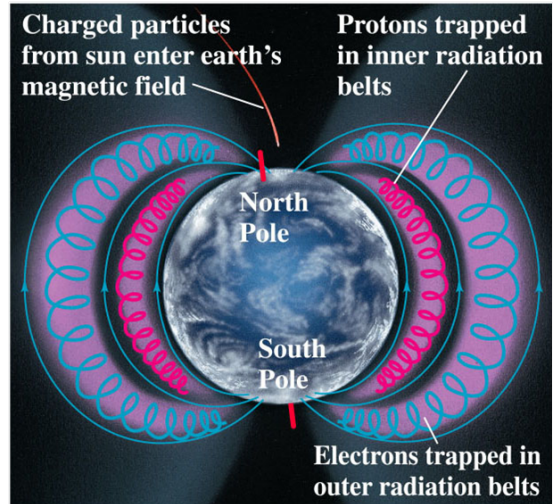
- ▶ Hiukkanen kulkee kierrerataa, jos  $\vec{v}$  ei ole kohtisuorassa  $\vec{B}$ :tä vastaan
- ▶ Kahden virtasilmukan välissä epähomogeeninen kenttä  $\Rightarrow$  magneettinen pullo, johon varatut hiukkaset voivat jäädä loukkuun
- ▶ Sovellus: kuumen plasman ( $T \sim 10^6$  K) keskittäminen fuusioreaktorissa



# Epähomogeeninen magneettikenttä

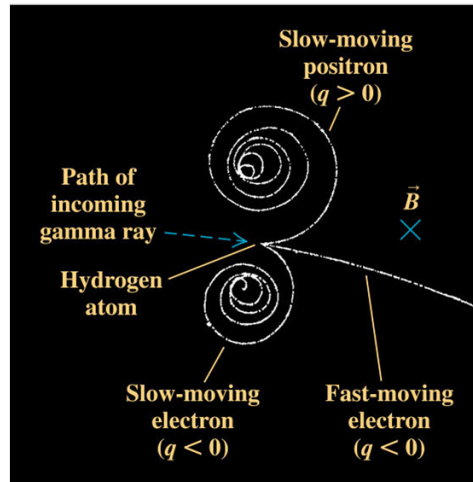
## Van Allenin vyöt

- ▶ Maan magneettikenttään muodostaa loukkuja varatuille hiukkasille
- ▶ Auringosta tulevat varatut hiukkaset loukkuuntuvat ennen ilmakehään osumistaan
  - ⇒ Van Allenin vyöt (löydettiin vasta 1958)
  - ⇒ revontulet



# Kuplakammio

- ▶ Kuplakammiossa on nestemäistä vetyä johon törmädetään hiukkasia
- ▶ Ulkoinen magneettikenttä on kohtisuorassa hiukkasten kulkusuuntaan nähden
- ▶ Esim. gammakvantti irrottaa nopean elektronin vetyatomista
  - ▶ Samalla muodostuu elektroni ja positroni (parinmuodostus)
  - ▶ Nämä hitaat hiukkaset kiertävät magneettikentän takia **spiraalirataa**
- ▶ Saadaan selville hiukkasten massoja ja varauksia



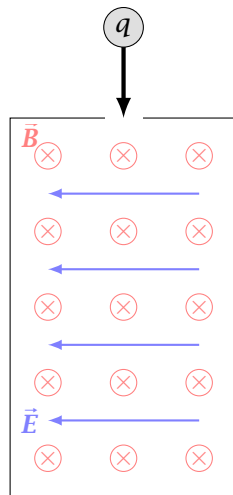


# Nopeudenvälitsin

- ▶ Varattujen hiukkasten suihkusta voidaan valita tietynnopeuksisia hiukkasia
- ▶ Sähkö- ja magneettikenttä kohtisuorassa toisiaan vastaan
- ▶ Suoraan kulkevat hiukkaset toteuttavat liikeyhtälön

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad qvB - qE = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

- ▶ Nopeus valitaan säätämällä kenttien voimakkuuksia
- ▶ Varauksen merkillä ei ole väliä



## J.J. Thomsonin $e/m$ -koe (1897)

- ▶ Tyhjiöputkessa kiihdytetään kuumasta katodista irtoavia elektroneja
- ▶ Potentiaaliero  $V$  kahden anodin välillä, elektronin massa  $m$  ja nopeus  $v$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

- ▶ Seuraavaksi elektronisuihku ohjataan nopeudenvälitsimeen:

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} = \text{mitattavissa}$$

- ▶ Thomson löysi elektronin ja sai määritetyksi elektronin varauksen ja massan suhteen:

$$\frac{e}{m} \approx 1.76 \times 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

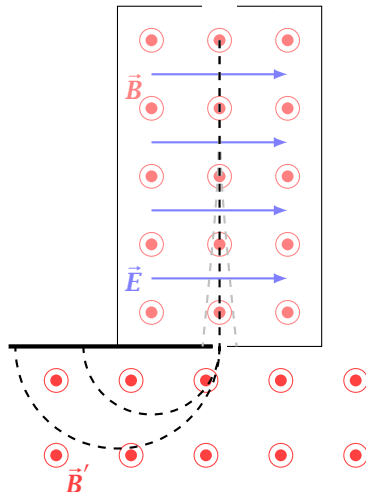
(R.A. Millikan 1913: elektronin varaus)

# Massaspektrometri

- ▶ Bainbridgen massaspektrometri (kuva)
- ▶ Kapea suihku positiivisia ioneja ohjataan nopeudenvälitsimeen
- ▶ Nopeudenvälitsimen jälkeen on kohtisuora magneettikenttä  $B'$
- ▶ Ionien rata kaareutuu ja ionit osuvat valokuvauslevylle
- ▶ Levylle osuvien ionien kulkuradan säde

$$R = \frac{mv}{qB'} = \frac{mE}{qBB'}$$

- ▶ Thomson löysi 1913 kaksi neonin **isotooppia**



## Virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima

- ▶ Johtimessa positiivinen varaus ajautuu ylöspäin (nopeus  $v_d$ ) ja

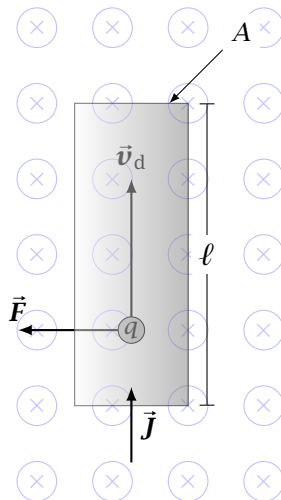
$$\vec{F} = q \vec{v}_d \times \vec{B}$$

- ▶ Varaustiheys  $n \Rightarrow$  johtimen  $\ell$ -pituisessa osassa on  $nA\ell$  varausta
- ▶ Osassa liikkuviin varauksiin kohdistuu kokonaisvoima

$$F = (nA\ell)(qv_dB) = (nqv_dA)(\ell B)$$

- ▶ Virrantiheys  $J = nqv_d = I/A$ , joten

$$F = (JA)(\ell B) = I\ell B$$



## Käyräviivaiset johtimet

- ▶ Jos johdin ja magneettikenttä eivät ole kohtisuorassa, voima

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

(virran kulkusuunta =  $\vec{\ell}$ :n suunta)

- ▶ Pätee myös negatiivisille virrankuljettajille ( $q \rightarrow -e$ ,  $\vec{v}_d \rightarrow -\vec{v}_d$ )
- ▶ **Käyräviivainen johde** jaetaan suoriin osiin  $d\vec{\ell}$ , joten

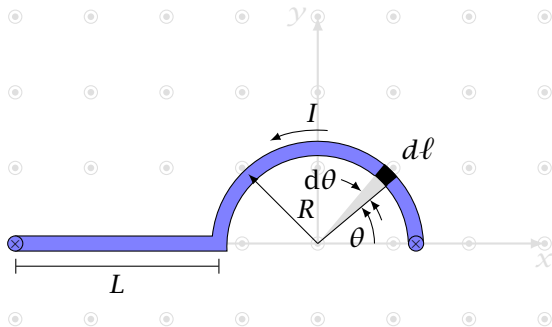
$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

(virta-alkioon kohdistuva magneettinen voima)

ja kokonaisvoima saadaan integroimalla johdinta pitkin

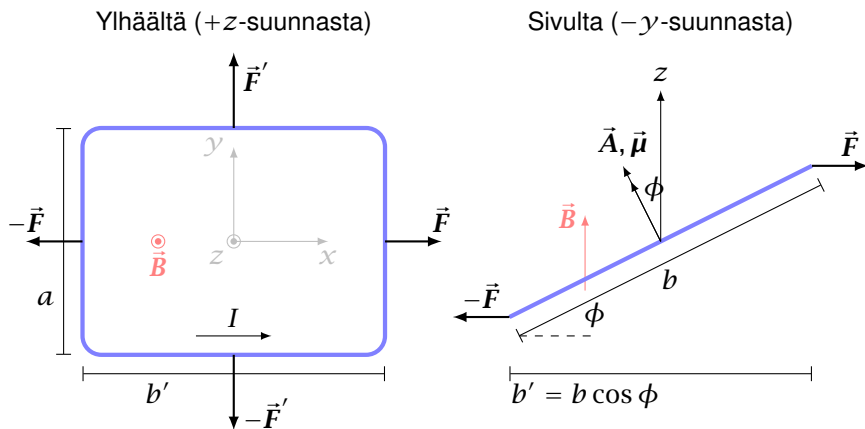
## Esimerkki

Laske kuvan johtimeen kohdistuva magneettinen voima



Lopputulos:  $\vec{F} = I(L + 2R)B \hat{j}$

# Virtasilmukka tasaisessa magneettikentässä



- ▶ Voimaparien  $\pm \vec{F}$  ja  $\pm \vec{F}'$  nettovoima on nolla
- ▶ Voimapari  $\pm \vec{F}$  aiheuttaa vääntömomentin  $y$ -akselin suhteen

# Magneettidipoli

- ▶ Edellä voima  $F = I a B$  ja  $F' = I b' B = I b B \cos \phi$  (muista: **tasainen**  $\vec{B}$ )
- ▶ Voiman  $F$  aiheuttama vääntömomentti

$$\tau = 2 (b/2) F \sin \phi = I a b B \sin \phi \stackrel{ab=A}{=} I A B \sin \phi$$

- ▶ Vääntömomentin amplitudilla on maksimi, kun  $\phi = 90^\circ$ , ja minimi, kun  $\phi = 0^\circ$  tai  $180^\circ$
- ▶ Tulo  $I A \stackrel{\text{def}}{=} \mu$  on silmukan **magneettinen dipolimomentti** tai **magneettinen momentti**:

$$\tau = \mu B \sin \phi \quad \text{tai} \quad \boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

- ▶ Virtasilmutka tai muu vääntömomenttia lausekkeen mukaisesti kokeva kappale magneetikentässä on **magneettidipoli**
- ▶ **Magneettisen momenttivektorin**  $\vec{\mu} = I \vec{A}$  suunta (= peukalo) saadaan oikean käden säännöllä virran kiertosuunnasta (= sormet);  $\vec{\mu}$  on kohtisuorassa virtasilmukan tasoa vastaan



# Magneettidipolin potentiaalienergia

- ▶ Magneettikenttä pyrkii kääntämään magneettidipolin niin, että  $\vec{\mu}$  on samansuuntainen  $\vec{B}$ :n kanssa (vääntömomentti nollassi)
- ▶ Jos kenttä kääntää dipolia, se tekee työtä
- ▶ Sähkökentän sähködipoliin aiheuttaman vääntömomentin lauseke ( $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ ) on samannäköinen magneettikentän magneettidipoliin aiheuttaman vääntömomentin kanssa, joten [vuorovaikutusten symmetrian perusteella](#)

$$U_{\mu} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

(magneettidipolin potentiaalienergia)

(muista: sähködipolille sähkökentässä  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ )

# Yleinen virtasilmukka

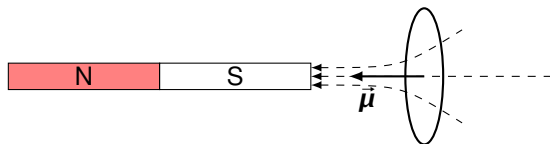
- ▶ Edelliset tulokset (vääntömomentti ja potentiaalienergia) johdettiin suorakaiteen muotoiselle virtasilmukalle
- ▶ Tulokset pätevät **mielivaltaiselle tasomaiselle virtasilmukalle**, päättely:
  - ▶ Jaetaan epäsäännöllinen **tasosilmukka** vierekkäisiin (äärettömän) kapeisiin suorakaidesilmukoihin
  - ▶ Vain suorakaiteiden ulkoreunojen virrat vaikuttavat, sisäreunojen vaikutukset kumoutuvat pareittain
- ▶ Jos  $N$ -kierroksinen **solenoidi** (kela) on **tasaisessa** magneettikentässä,

$$\mu = NIA \quad \Rightarrow \quad \tau = NIAB \sin \phi$$

- ▶ Dipolimomentti on solenoidin akselin suuntainen ja magneettikenttä pyrkii kääntämään solenoidin itsensä suuntaiseksi
- ▶ Magneettidipolin sovelluksia: d'Arsonvalin galvanometri, MRI-kuvaus (engl. magnetic resonance imaging)

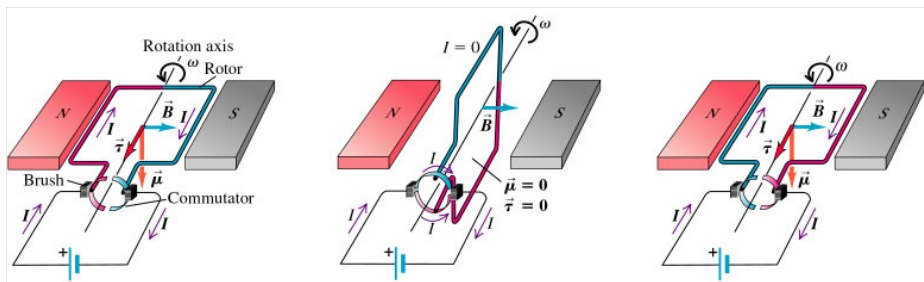
## Virtasilmutukka epähomogeenisessa magneettikentässä

- ▶ Tasaisessa magneettikentässä virtasilmutukkaan ei kohdistu nettovoimaa
- ▶ Kestomagneetin S-navan epähomogeenisessa magneettikentässä virtasilmutukka, jonka dipolimomentti osoittaa kohti kestopagneettia, pyrkii kohti napaa (entä pohjoisnavalla?)



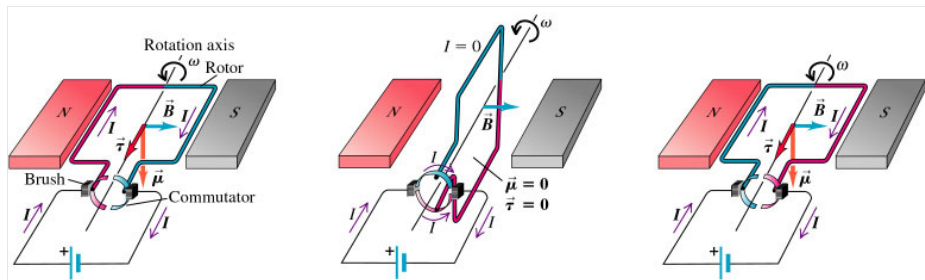
- ▶ Elektronilla on **spininsä** ansiosta magneettinen momentti
- ▶ Rauta-atomeissa (**toisin kuin** useimmissa muissa aineissa) monien elektronien momentit yhdensuuntaistuvat  $\Rightarrow$  rauta-atomeilla on magneettinen nettomomentti  $\Rightarrow$  raudan voi **magnetoida** kestopagneetiksi ja magneetin epähomogeeninen kenttä vetää (magnetoimatontakin) rautaa puoleensa

# Tasavirtamoottorin osat



- ▶ Kiertyvä virtasilmukka on **roottori**
- ▶ Silmukan päät ovat kiinni **kommutaattorissa**
- ▶ Kommutaattorin johdelohkot koskettavat johtavia **harjoja**
- ▶ Harjat on kytketty smv:n lähteeseen (esim. paristo)

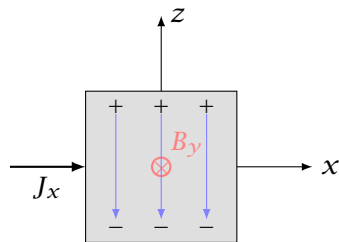
# Toimintaperiaate



1. Väntömomentti  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  kääntää roottorin  $\vec{\mu}$ :n magneettikentän suuntaiseksi
2. Harjat osuvat molempiin kommutaattorin lohkoihin (virta silmukassa katkeaa)
3. Roottori jatkaa pyörimistä (kulmaliikemäärä!), kunnes virta taas kulkee silmukassa

# Hallin ilmiö

- ▶ Asetetaan johdelevy kohtisuorasti magneettikenttää vastaan
- ▶ Levyn läpi ohjataan virta  $x$ -akselin suuntaan
- ▶ Varaukseen  $q (> 0)$  kohdistuu voima  $F_z = qv_d B_y$
- ▶ Varaukset erottuvat levyn vastakkaisiin reunoihin  
 $\Rightarrow$  sähkökenttä  $E_z$  [alaspäin]



- ▶ Tasapainossa  $\sum F_z = 0 \Rightarrow qE_z + qv_d B_y = 0 \Rightarrow E_z = -v_d B_y$
- ▶ Virrantiheys  $J_x = nqv_d$

 $\Rightarrow$ 

$$nq = -\frac{J_x B_y}{E_z}$$

Hallin ilmiö

- ▶ Sovelluksia:  $n$ :n,  $v_d$ :n tai erityisesti  $B_y$ :n mittaaminen

# Yhteenveto luvusta 27

## Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Magneettikenttä  $\vec{B}$
- ▶ Magneettinen voima  $\vec{F}$
- ▶ Magneettivuo  $\Phi_B$
- ▶ Magneettidipoli ja magneettinen momentti  $\vec{\mu}$
- ▶ Hallin ilmiö

## Tärkeitä kaavoja

Magneettinen voima

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}} \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Gaussin laki magnetismille

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Magneettidipoli  $\vec{\mu} = I\vec{A}$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U_\mu = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$