



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 6

Magneettikentän lähteet (YF 28)

Liikkuvan varauksen magneettikenttä

Virta-alkion magneettikenttä

Suoran virtajohtimen magneettikenttä

Virtajohtimien välinen voima

Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

Lävistyslaki

Lävistyslain sovelluksia

Magneettiset materiaalit

Yhteenveto



Magneettisesti leijutettu mansikka:

<http://www.ru.nl/hfml/research/levitation/diamagnetic/>

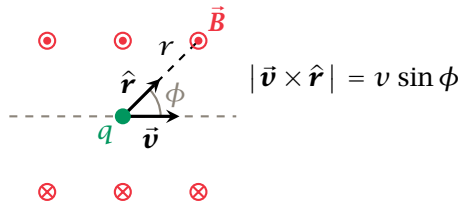
Tavoitteena on oppia

- ▶ liikkuvan varauksen ja sähkövirran tuottaman magneettikentän luonne
- ▶ miten sähkövirran synnyttämää magnettikenttää lasketaan Biot–Savartin lailla (sopivan yksinkertaisissa tapauksissa)
- ▶ millaiset magneettiset voimat sähkövirtojen välille syntyvät
- ▶ mikä lävistyslaki (Ampèren laki) on ja miten sitä käytetään symmetristen virtajakautumien magneettikenttien laskemiseen
- ▶ millaiset materiaaliparametrit paramagneettisilla, diamagneettisilla ja ferromagneettisilla aineilla on

Liikkuva pistevaraus

- Tähän asti magneettikenttä on otettu "annettuna" – mutta **miten** magneettikenttä luodaan?
- Kokeellisesti** on havaittu, että etäisyydellä r **vakionopeudella** \vec{v} etenevästä pistevarauksesta q on magneettikenttä

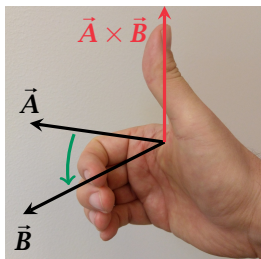
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$



- Kenttäviivat ovat aikariippuvia ympyröitä, joiden akselina on kulkurata. (Kuvassa $q > 0$.)
- Vakio $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A}$ on tyhjiön permeabilisuus (tai permeabiliteetti).
Lisäksi $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ on valonnopeus tyhjiössä.

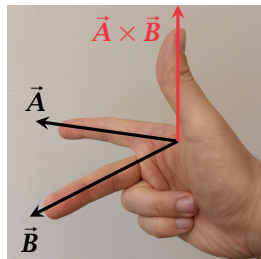
Muista oikean käden sääntö ristitulon suunnalle

Oppikirjan versio



Oikean käden peukalo osoittaa ristitulon $\vec{A} \times \vec{B}$ suuntaan, kun muut sormet kaartuvat vektorin \vec{A} suunnasta kohti vektorin \vec{B} suuntaa.

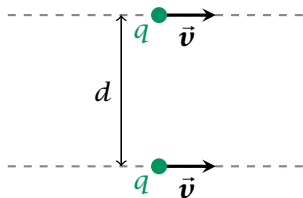
Toinen suosittu versio



etusormi = vektorin \vec{A} suunta
keskisormi = vektorin \vec{B} suunta
peukalo = ristitulon $\vec{A} \times \vec{B}$ suunta

Esimerkki

Kaksi positiivista pistevarausta q liikkuvat vierekkäin samaan suuntaan nopeudella \vec{v} kuvan mukaisesti. Millaiset sähköiset ja magneettiset voimat vaikuttavat näiden välillä?



Lopputulos: Varausten välillä on sähköinen hylkimisvoima ja magneettinen vetovoima. Voimien suhde $F_E/F_B = c^2/v^2$, eli magneettinen voima on mitättömän pieni, kun $v \ll c$.

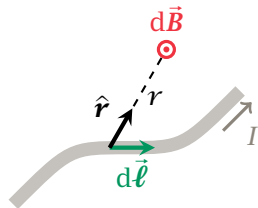
Tästä voimme päätellä, että yksittäisen liikkuvan varauksen synnyttämää magneettikenttää ei yleensä tarvitse ottaa huomioon.

Suhteellisuusteorian vaikutus \vec{E} - ja \vec{B} -kenttiin pitää ottaa huomioon, jos nopeus lähenee valonnopeutta.

Biot–Savartin laki

- ▶ Lyhyessä **virta-alkiossa** $d\ell$ on varaus $dQ = nqA d\ell$ (A = johtimen poikkipinta-ala) ja varaus liikkuu nopeudella $v_d \Rightarrow |dQ| v_d = I d\ell$
- ▶ Virta-alkio $d\ell$ aiheuttaa magneettikentän

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$



- ▶ Todellisuudessa vain suljetut virtapiirit ovat mahdollisia!
- ▶ **Suljetun virtapiirin** kokonaiskenttä saadaan integroimalla:

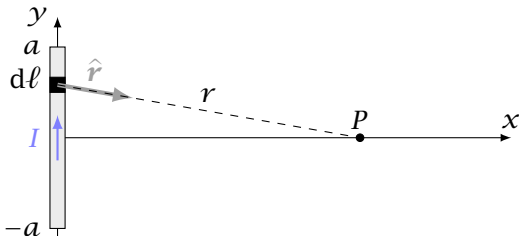
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot–Savartin laki

- ▶ (Myös **Biot'n ja Savartin laki**; Biot = [bi:ou], Savart = [sə'var])

Suora virtajohdin

- ▶ Tärkeä Biot–Savartin lain sovellus
- ▶ Johtimen pituus olkoon $2a$ (miten virtapiiri sulkeutuu?)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(\hat{j} dy) \times (x\hat{i} - y\hat{j})}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\hat{k}\mu_0 I x dy}{4\pi(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_{-a}^a d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I x}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \dots = -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Suora virtajohdin

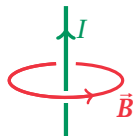
Jatkoa

- ▶ Jos virtajohdin on erittäin pitkä ($a \gg x$),

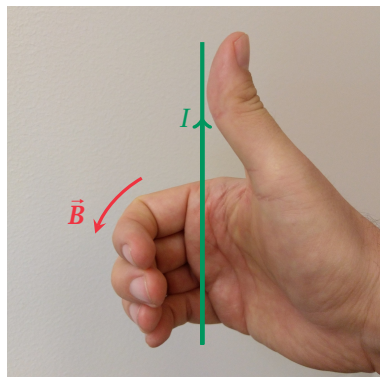
$$\sqrt{x^2 + a^2} \approx a \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

⇒ Pitkän suoran johtimen magneettikenttä

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

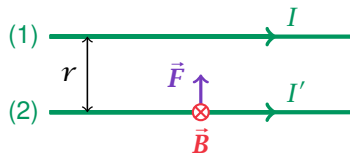


Tässä r on etäisyys johtimesta ja **kenttäviivat** ovat johdinta kiertäviä ympyröitä joiden suunnan saa oikean käden säännöllä **virrasta**.



Kaksi johdinta vierekkäin

- ▶ Otetaan kaksi pitkää suoraa johdinta (pituus L), joiden virrat I ja I' kulkevat samaan suuntaan
- ▶ Johdin (1) tuottaa etäisyydellä r olevan johtimen (2) kohdalle magneettikentän $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- ▶ Magneettikenttä kohdistaa toiseen johtimeen (2) voiman



$$F = |I' \vec{L} \times \vec{B}| = I' L B = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

(F/L on voima pituusyksikköä kohti)

- ▶ Soveltamalla oikean käden sääntöä kahdesti (kentän suunta & voiman suunta) huomataan, että **samansuuntaista** virtaa kuljettavat johtimet **vetävät toisiaan** puoleensa ja **vastakkaissuuntaista** virtaa kuljettavat johtimet **hylkivät toisiaan**

Ampeerin määritelmä

- ▶ Voimavaikuksesta saadaan **toiminnallinen** määritelmä ampeerille
- ▶ Yksi ampeeri on tasavirta, joka aiheuttaa kahden, metrin etäisyydellä toisistaan olevan yhdensuuntaisen johtimen välille pituusyksikköä kohden voiman $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$
- ▶ Määritelmästä seuraa

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 (1 \text{ A})^2}{2\pi (1 \text{ m})} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

(μ_0 :n SI-yksikkö voidaan kirjoittaa monella tavalla)

Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

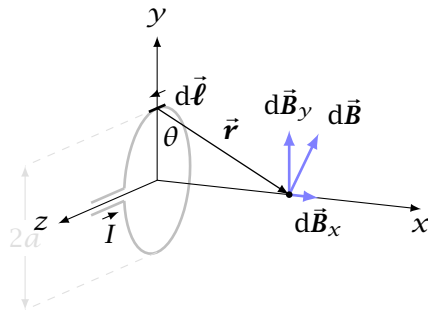
- ▶ Lasketaan magneettikenttä **silman akselilla** Biot–Savartin lain avulla
- ▶ Suorien osien magneettikentät **kumoavat toisensa**
- ▶ Lisäksi $d\vec{\ell} \perp \hat{r}$, joten

$$|d\vec{B}| = dB = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2}$$

- ▶ Vektorin $d\vec{B}$ komponentit **kuvan $d\vec{\ell}$ -alkion** tapauksessa ovat

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

Integroidaan...

- ▶ Kokonaismagneettikenttään ei jää yz -tason suuntaisia komponentteja symmetrian takia
- ▶ Kokonaismagneettikenttä on x -suuntainen

$$B = B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \underbrace{\int d\ell}_{=2\pi a} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}} \quad (B\text{-kenttä virtasilmukan akselilla})$$

(kentän suunta akselilla [= peukalo]: oikean käden sääntö virran [= sormet] suhteen)

- ▶ Jos samalla akselilla on N identtistä silmukkaa, $B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}$

Kela

- ▶ N -kierroksisen kelan maksimimagneettikenttä on kelan keskellä ($x = 0$):

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 NI}{2a} \quad (\text{kelan keskellä})$$

- ▶ Kelan magneettinen dipolimomentti $\mu = NIA = NI\pi a^2$, joten toisaalta

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{kelan akselilla})$$

(huomaa: μ_0 on tyhjiön permeabilisuus, μ kelan magneettinen momentti)

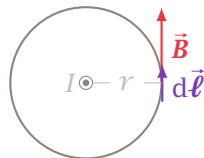
- ▶ **Magneetidipoli** (silmukka tai kela) on **magneettikentän lähde**
- ▶ Kelan akselilla kelavirran synnyttämä \vec{B} on **samansuuntainen** $\vec{\mu}$:n kanssa
- ▶ Kenttäviivat kiertävät silmukan läpi **mutteivät** ole ympyröitä

Magneettikentän viivaintegraali

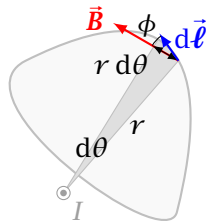
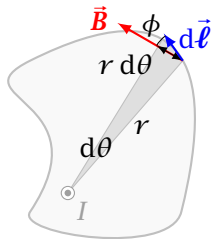
- ▶ Symmetrisen varausjakautuman sähkökenttä oli mahdollista määrittää **Gaussin lakia** käyttämällä
- ▶ Magnetismin Gaussin laissa ei näy lähteitä (virtoja), joten se ei käy magneettikentän määrittämiseen
- ▶ Magnetostatiikassa tarjolla on **lävistyslaki** eli [integraalimuotoinen] **Ampèren laki**, joka perustuu magneettikentän **viivaintegraaliin**
- ▶ Integroidaan **pitkän johtimen** magneettikenttää suljettua r -säteistä ympärää pitkin:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_{\parallel} d\ell = B \oint d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

- ▶ Virta I on integrointitien rajoittaman **pinnan läpi kulkeva** virta (kun oikean käden sormet osoittavat tien suuntaan, peukalo osoittaa virran **positiivisen** suunnan)



Yleinen tapaus



$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos \phi$, yllä $d\ell \cos \phi = r d\theta$:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \mu_0 I \end{aligned}$$

(θ :n nettomuutos on 2π)

Nyt integraali = 0, koska θ :n nettomuutos kierroksen aikana on nolla

Lävistyslaki

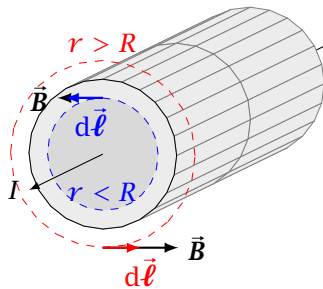
- ▶ Tulos on riippumaton integrointitien rajaaman pinnan muodosta
 - ▶ Jos virta I lävistää pinnan positiiviseen suuntaan, tulos on $\mu_0 I$
 - ▶ Jos virta ei lävistä pintaa, tulos on nolla
 - ▶ Johtopäätös pysyy samana, vaikka virtojen määrää lisätään; voidaan korvata $\mu_0 I \rightarrow \mu_0 I_{\text{encl}}$, missä I_{encl} on integrointitien sisään jäävien virtojen summa **etumerkkeineen (oikean käden sääntö tien suunnan ja virran positiivisen suunnan välillä)** eli integrointitien rajaaman pinnan läpi kulkevien virtojen summa
- = **Lävistyslaki** eli [integraalimuotoinen] **Ampèren laki**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

- ▶ Käyttökelpoinen työkalu magneettikenttien analysoimiseen
- ▶ **Käyttökelpoisuus edellyttää symmetriaa**, vrt. Gaussin laki
- ▶ Huomaa: Ampèren lakia voi käyttää **tässä muodossa vain statiikassa!**
- ▶ (Ampère = [ɑ̃ʁɛʁ])

Pitkän sylinterijohdtimeen kenttä

- ▶ Sylinterijohdin, virta I , halkaisija $2R$
- ▶ Symmetriasta voidaan päätellä, että magneettikenttä riippuu vain etäisyydestä johtimen akselista ja että kenttä kiertää johdinta oikean käden säännön mukaisesti (peukalo virran suuntaan – sormet osoittavat kentän suuntaan)



- ▶ Kaikkialla $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ ja B vakio integrointitiellä \Rightarrow lävistyslakia kannattaa käyttää:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint d\ell = B(2\pi r)$$

- ▶ Sylinterin sisällä ($r < R$) $I_{\text{encl}} = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2}(\pi r^2) = I \frac{r^2}{R^2}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

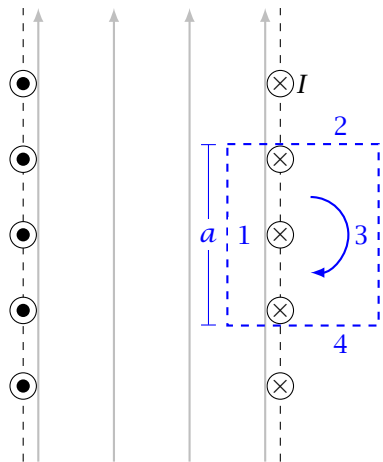
- ▶ Sylinterin ulkopuolella ($r > R$) $I_{\text{encl}} = I \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- ▶ Sama tulos kuin pitkällä johtimella

Solenoidin kenttä

- ▶ Suora, [erittäin]monikierröksinen sylinterimäinen käämi
- ▶ Tiheään solenoidin keskellä on **tasainen, akselin suuntainen kenttä**: $B = \text{vakio}$
- ▶ Pitkän solenoidin **ulkopuolella** $B \approx 0$
- ▶ Oletetaan N johdinkierrosta, solenoidin pituus L ja **virta** I
- ▶ Valitaan **integrointitie ja -suunta**
- ▶ Lasketaan $\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ erikseen osuuksilla 1...4



Solenoidin kenttä

Jatkoa

- ▶ Osuus 1: $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ ja $B = \text{vakio}$

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int d\ell = Ba$$

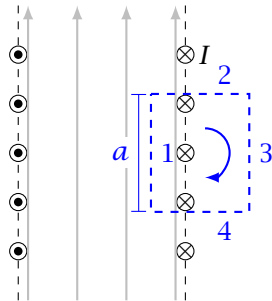
- ▶ Osuudet 2...4: sisällä $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$ ja ulkopuolella $B = 0$

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- ▶ Koska käämmistiheys $n = N/L$, $I_{\text{encl}} = naI$
- ▶ Lävistyslaki:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = Ba = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 naI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

(solenoidin sisäkenttä)



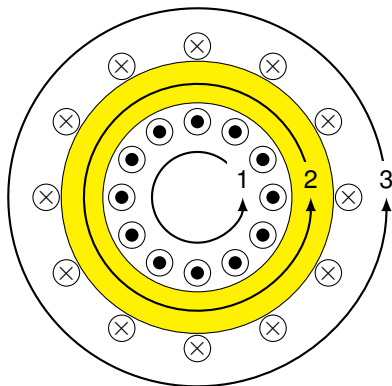
Toroidikelan kenttä

- Symmetrian takia kenttäviivojen täytyy olla toroidin akselin kanssa samankeskisiä ympyröitä
- Solenoidin virta on I ja kierrosmäärä N
- Tutkitaan kolme eri integrointitietä,

$$\text{kaikilla } \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r)$$

- Tie 1: $I_{\text{encl}} = 0 \Rightarrow B = 0$
- Tie 3: $I_{\text{encl}} = 0 \Rightarrow B = 0$
- Tie 2: $I_{\text{encl}} = NI$, joten

$$2\pi r B = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



Magnetoituminen

- ▶ Atomytimiä kiertävät elektronit muodostavat virtasilmuja \Rightarrow magneettinen momentti
- ▶ Monissa materiaaleissa virrat ovat satunnaisesti suuntautuneet **eikä magneettista nettomomenttia synny**
- ▶ Joissakin materiaaleissa ulkoinen magneettikenttä voi kääntää momentit enimmäkseen kentän suuntaisiksi, jolloin aine **magnetoituu** (vrt. eristeen polarisoituminen sähkökentässä)
- ▶ Elektroneilla on lisäksi sisäinen liikemäärämomentti eli **spin** (kvanttimekaanisessa mielessä)
- ▶ Tarkempi magnetoitumisen tarkastelu edellyttää kvanttimekaniikan työkaluja

Magnetoitumisen lajit

Paramagnetismi

- ▶ Joidenkin aineiden atomeilla on pieni pysyvä magneettinen dipolimomentti, joka syntyy atomien elektronien rata- ja spinliikemäärämomenteista: aine on **paramagneettista**
- ▶ Ulkoinen kenttä vääntää aineen dipolit itsensä suuntaisiksi, jolloin nettokenttä **vahvistuu**
- ▶ Tällaisessa aineessa magneettikenttä on kertoimella K_m (**suhteellinen permeabilisuus**) suurempi kuin tyhjiössä (K_m on yksikötön kuten K)
- ▶ Aineen **permeabilisuus** μ on suhteellisen permeabilisuuden K_m ja **tyhjiön permeabilisuuden** μ_0 tulo:

$$\mu = K_m \mu_0$$

- ▶ Esimerkiksi alumiinin $K_m = 1.000022$, mikä selittää, miksi magneetit vetävä alumiinia puoleensa erittäin heikosti (permeabilisuus kuitenkin kasvaa **lämpötilan laskiessa**)
- ▶ (Suhteellisen permeabilisuuden poikkeama ykkösestä on **magneettinen susceptiivisuus** $\chi_m = K_m - 1$.)

(Huom: **permeabilisuus** = **permeabiliteetti**. Ensimmäinen on SFS-standardin mukainen, mutta toinen on yleisempi.)

Magnetoitumisen lajit

Diamagnetismi

- ▶ Joillakin aineilla ulkoinen magneettikenttä indusoi [Faradayn induktiolain mukaisesti] atomeihin magneettisen dipolimomentin, jonka muodostama kenttä **vastustaa ulkoista kenttää** (kuten käy eristeelle sähkökentässä); tällainen aine on **diamagneettista**
- ▶ Indusoitunut kenttä on tyypillisesti heikko, mutta joillakin materiaaleilla se voi kumota ulkoisen magneettikentän aineen sisällä \Rightarrow suprajohtavuus (matalissa lämpötiloissa, vaikka diamagneettisuuden lämpötilariippuvuus on muuten vähäinen)
- ▶ $K_m \sim 0.99990 \dots 0.99999$
- ▶ (Elollinen aine on diamagneettista, joten sitä voi leijuttaa voimakkaassa magneettikentässä, vrt. sisällysluettelon kuva ja linkit)

Magnetoitumisen lajit

Ferromagnetismi

- ▶ Joissakin aineissa (esim. rauta, nikkeli) atomien magneettiset momentit vaikuttavat toisiinsa voimakkaasti ja **magneettisten alkeisalueiden** sisällä momentit samansuuntaistuvat
- ▶ Yleensä (ilman ulkoista kenttää) alkeisalueet ovat keskenään satunnaisesti suuntautuneita
- ▶ Ulkoisessa kentässä alkeisalueiden momentit kääntyvät kentän suuntaisiksi, kentän suuntaiset alueet kasvavat ja muunsuuntaiset alueet pienenevät \Rightarrow voimakas nettomagnetoituma; tällaiset aineet ovat **ferromagneettisia**
- ▶ $K_m \sim 1000 \dots 100000$
- ▶ Ferromagneettisen aineen K_m riippuu ulkoisen kentän voimakkuudesta (vaste on **epälineaarinen**) ja magnetoitumahistoriasta (**hystereesi**; aineella on ”muisti”, jota voi käyttää kestopagneettien tekemiseen)

Yhteenveto luvusta 28

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Liikkuvan varauksen magneettikenttä
- ▶ Virran aiheuttama magneettikenttä
- ▶ Virtajohtimien välinen voima
- ▶ Paramagneettinen, diamagneettinen ja ferromagneettinen aine
- ▶ Permeabilisuus $\mu = K_m \mu_0$

Käytä lävistyslakia, jos mahdollista, koska se on paljon helpompi kuin Biot–Savartin laki.

Tärkeitä kaavoja

Biot–Savartin laki

$$\vec{B} = \oint \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Pitkän suoran virtalangan kenttä

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$


Lävistyslaki eli Ampèren laki

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

sopivan symmetrisessä tapauksessa

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{\text{encl}}}{2\pi r}$$