Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

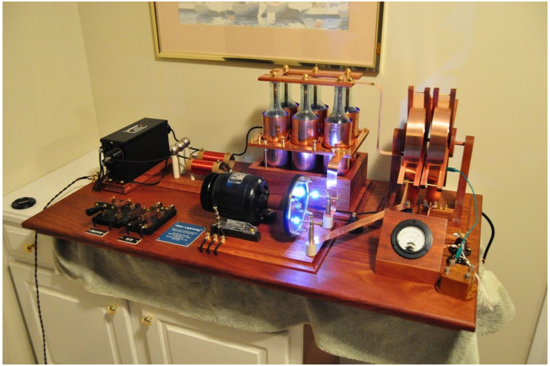
Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 8

Sähkömagneettiset aallot (YF 32)

- Maxwellin yhtälöt ja sähkömagneettiset aallot
- Sähkömagneettiset tasoaallot ja valon nopeus
- Sinimuotoiset sähkömagneettiset aallot
- Sähkömagneettisten aaltojen energia ja liikemäärä
- Seisovat sähkömagneettiset aallot
- Yhteenveto



Lähde: `http://vintagehamstation.com/n4ggspark.htm`

Tavoitteena on oppia

- miksi valoaallossa on sekä sähkö- että magneettikenttä
- miten valon nopeus liittyy sähkön ja magnetismin luonnonvakioihin
- miten kuvataan sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon etenemistä
- mikä määrää sähkömagneettisen aallon kuljettaman tehon
- miten kuvataan seisovia sähkömagneettisia aaltoja

Maxwellin yhtälöt väliaineessa

Jos avaruudessa on (mahdollisesti paikan mukana muuttuvaa) väliainetta ε, μ, yhtälöt saavat muodon (muista kätisyys- ja liikkumattomuusehdot!):

$$\oint \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\mathrm{encl-free}}$$ Gaussin laki

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$ magnetismin Gaussin laki

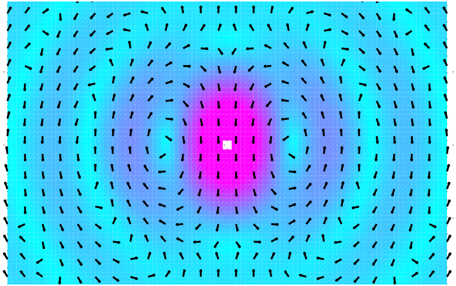
$$\oint \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \left(i_{\mathrm{C,free}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right] \right)_{\mathrm{encl}}$$ Ampèren laki

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$ Faradayn laki

- $Q_{\mathrm{encl-free}}$ on vapaa varaus Gaussin pinnan sisällä (esim. johteen varauksenkuljettajat tai kappaleelle annettu nettovaraus; eristeen polarisoitumisessa syntyvä pintavaraus ei ole vapaata vaan sidottua varausta)
- $i_{\mathrm{C,free}}$ on vapaa johtavuusvirta [integrointisilmukan läpi] (magnetoitumisessa esiintyvien magneettisten dipolien virta ei ole vapaata vaan sidottua virtaa)

Maxwellin yhtälöiden seurauksia

- Staattinen pistevaraus luo sähkökentän
- Tasaisesti (= vakiovauhdilla) liikkuva varaus luo sekä sähkö- että magneettikentän, mutta kentät voi analysoida erikseen
- Kiihtyvässä liikkeessä oleva varaus lähettää **sähkömagneettisia aaltoja** eli **sähkömagneettista säteilyä,** joten sähkö- ja magneettikentät on analysoitava yhdessä



(Harmonisesti värähtelevän sähködipolin tuottama sähkökenttä eräällä hetkellä)

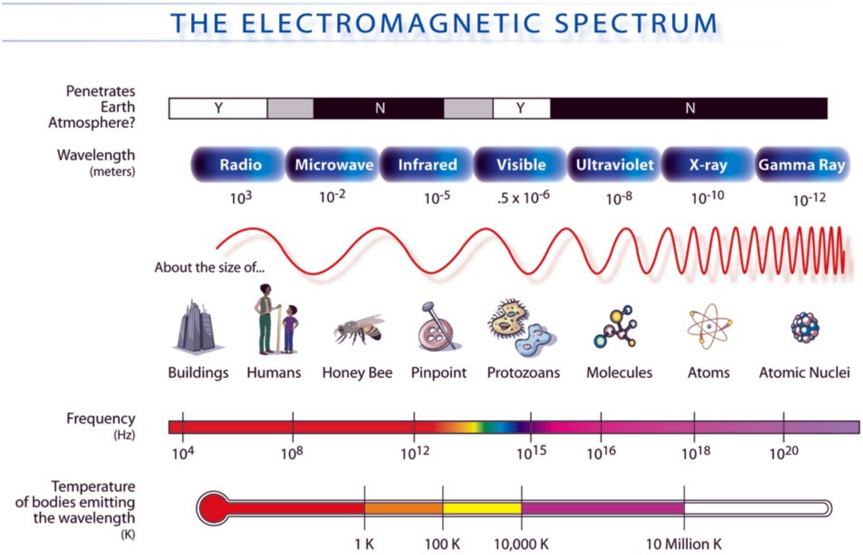
Sähkömagneettinen spektri

- **Sähkömagneettinen spektri** sisältää kaikentaajuiset (eli kaikenaallonpituuksiset) sähkömagneettiset aallot
- Aallon taajuus f, aallonpituus λ ja valonnopeus tyhjiössä yhdistyvät yhteyden $c = \lambda f$ kautta, $c \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

radioaallot	$\lambda \approx 10\,\mathrm{cm}$ – useita km
mikro- ja millimetriaallot	$1\,\mathrm{mm} - 10\,\mathrm{cm}$
(terahertsiaallot	$0.1\,\mathrm{mm} - 1\,\mathrm{mm}$)
infrapuna (IR)	$780\,\mathrm{nm} - 1\,\mathrm{mm}$
kaukoinfrapuna	$50\,\mathrm{\mu m} - 1000\,\mathrm{\mu m}$
keski-infrapuna	$3\,\mathrm{\mu m} - 50\,\mathrm{\mu m}$
lähi-infrapuna	$0.78\,\mathrm{\mu m} - 3\,\mathrm{\mu m}$
näkyvä valo	$390\,\mathrm{nm} - 780\,\mathrm{nm}$
ultravioletti (UV)	$10\,\mathrm{nm} - 390\,\mathrm{nm}$ $(3.2\,\mathrm{eV} - 100\,\mathrm{eV})$
röntgensäteet	$100\,\mathrm{eV} - 0.1\,\mathrm{MeV}$
gammasäteet	$0.1\,\mathrm{MeV} - 10\,\mathrm{TeV}$

Sähkömagneettinen spektri

Hieman epämääräinen havainnollistus

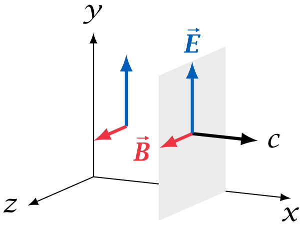


http://mynasadata.larc.nasa.gov/glossary/electromagnetic-spectrum-2/

Yksinkertainen tasoaalto (= askeltasoaalto)

Alkuasetelma

- Etsitään sähkömagneettisten aaltojen ja sähkömagnetismin lakien välinen yhteys
- Oletetaan, että x-akselia vastaan kohtisuora taso jakaa tyhjän avaruuden kahteen osaan siten, että
  - kaikkialla tason "takana" (kuvassa vasemmalla) on tasainen y-suuntainen $\vec{E}$-kenttä ja tasainen z-suuntainen $\vec{B}$-kenttä
  - kaikkialla tason "edessä" (oikealla) ei ole $\vec{E}$- eikä $\vec{B}$-kenttiä



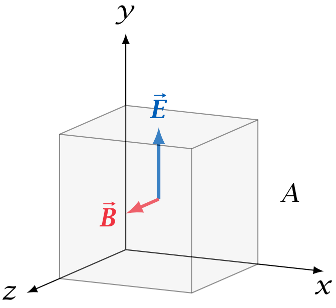
Toteutuvatko Maxwellin yhtälöt?

- Oletetaan, että jakava taso eli **aaltorintama** etenee $+x$-akselin suuntaan (toistaiseksi määrittelemättömällä) nopeudella c
- Kyseessä on **tasoaalto** (= kentät aaltorintaman takana ovat vakioita rintaman kanssa yhdensuuntaisilla tasoilla)

Yksinkertainen tasoaalto (= askeltasoaalto)

Gaussin lakien toteutuminen

- Valitaan kuvan mukainen Gaussin pinta (päätyjen pinta-ala on A ja rintama osuu laatikkoon vektorien kohdalle)
- Tyhjä tila $\implies$ ei varauksia
- Kuvitellaan hetken, että $E_x, B_x \neq 0$:



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -E_x A = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\implies \quad E_x = 0;$$

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -B_x A = 0 \quad \implies \quad B_x = 0$$

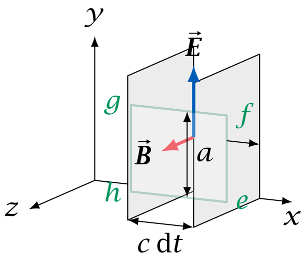
- Gaussin lait toteutuvat, jos $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden eli **poikittaisia;** valitaan $\vec{E} = \hat{\jmath} E_y = \hat{\jmath} E$

Yksinkertainen tasoaalto (= askeltasoaalto)

Faradayn lain toteutuminen

- Kiinteä integrointipolku ja -suunta: $efgh$
- Vain sivu gh vaikuttaa integraaliin (miksi?):

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -Ea = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad (\Rightarrow B_z \neq 0)$$



- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama liikkuu matkan $c\,\mathrm{d}t$ ja pyyhkäisee pinta-alan $ac\,\mathrm{d}t$ ($efgh$:ssa)
- Magneettivuon muutos $efgh$-pinnan läpi ($\vec{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{k}}B_z = \hat{\boldsymbol{k}}B$)

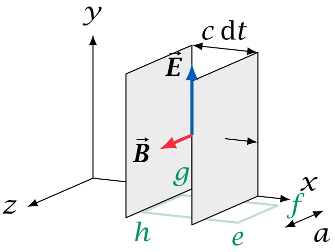
$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = Bac\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = Bac \quad \Rightarrow \quad -Ea = -Bac \;\Leftrightarrow\; E = cB$$

- Faradayn laki toteutuu, jos $\boxed{E = cB \quad \text{(tyhjiössä)}}$

(hetkinen: voisiko $\vec{\boldsymbol{B}}$:llä olla y-komponentti? [ei voi, koska $E_x = E_z = 0$])

Yksinkertainen tasoaalto (= askeltasoaalto)

Ampèren lain toteutuminen



- Kiinteä integrointipolku ja -suunta: $efgh$
- Vain sivu gh vaikuttaa integraaliin (?):

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = Ba = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \quad (\Rightarrow E_y \neq 0)$$

- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama liikkuu matkan $c\,\mathrm{d}t$ ja pyyhkäisee pinta-alan $ac\,\mathrm{d}t$ ($efgh$:ssa)
- Sähkövuon muutos $efgh$-pinnan läpi

$$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Eac\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = Eac \quad \Rightarrow \quad Ba = \mu_0\varepsilon_0 Eac \;\Leftrightarrow\; B = \mu_0\varepsilon_0 cE$$

- Ampèren laki toteutuu, jos $\boxed{B = \mu_0\varepsilon_0 cE \quad \text{(tyhjiössä)}}$

Sähkömagneettisten aaltojen pääominaisuudet

- Faradayn ja Ampèren laki toteutuvat yhtäaikaa, kun

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \equiv c_0 \equiv 299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3.00 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \qquad \text{(tyhjiössä)}$$

- Sähkömagneettisten (taso)aaltojen ominaisuudet:

1. Aalto on **poikittainen:** $\vec{E} \perp \vec{B} \perp$ aallon etenemissuunta ($= \vec{E} \times \vec{B}$:n suunta)
2. $\vec{E}$:n ja $\vec{B}$:n **amplitudit** ovat suhteessa toisiinsa: $E = cB$
3. Aalto etenee tyhjiössä **valonnopeudella** c, joka on vakio
4. Sähkömagneettinen aalto **ei tarvitse väliainetta** edetäkseen

- Juuri käsiteltyjen ”askel-” tai ”palikka-aaltojen” superpositio toteuttaa Maxwellin yhtälöt, kun kaikki osa-aallot etenevät samalla nopeudella $c \implies$ myös sinimuotoinen tasoaalto toteuttaa yhtälöt

Sähkömagneettinen aaltoyhtälö

Toistetaan Faradayn laki ja Ampèren laki -tarkastelut tasoilla $x = x$ ja $x = x + \Delta x$ poikittaisille kentille E_y ja B_z, jotka ovat x:n ja t:n funktioita

- Faradayn laki antaa

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -E_y(x,t)a + E_y(x+\Delta x, t)a = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} a\Delta x$$

$$\Longrightarrow \ \ldots \ \Longrightarrow \quad \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}, \quad \text{kun } \Delta x \to 0$$

- Ampèren laki antaa

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -B_z(x+\Delta x, t)a + B_z(x,t)a = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a\Delta x$$

$$\Longrightarrow \ \ldots \ \Longrightarrow \quad -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}, \quad \text{kun } \Delta x \to 0$$

Sähkömagneettinen aaltoyhtälö

Jatkoa

- Otetaan Faradayn lain antamasta tuloksesta osittaisderivaatta x:n suhteen ja Ampèren lain antamasta tuloksesta osittaisderivaatta t:n suhteen ja eliminoidaan B_z:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} \quad \& \quad -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

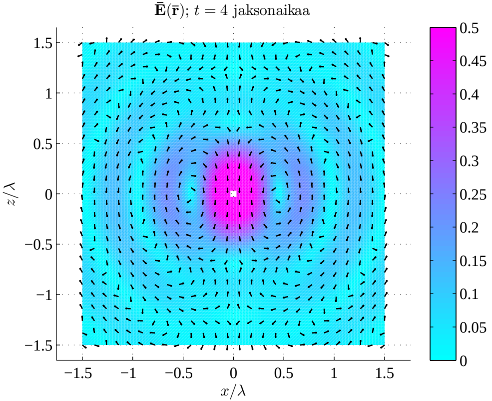
- Saatiin sähkömagneettinen **aaltoyhtälö** tyhjiössä; mekaniikan vastine nopeudella v (x-akselia pitkin) etenevälle poikkeamalle $y(x,t)$ olisi

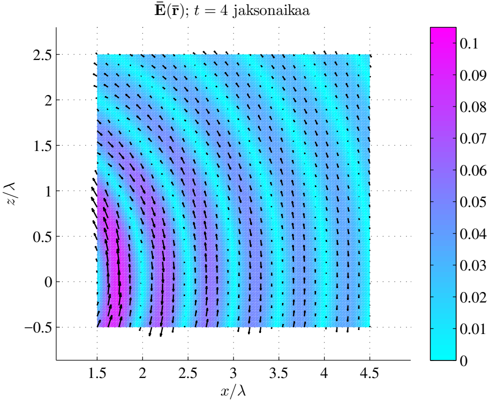
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},$$

joten jälleen huomataan $1/v^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \iff v = c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

- B_z:lle voidaan kirjoittaa samanlainen yhtälö

Värähtelevän sähködipolin kenttä





Sinimuotoisesti värähtelevän sähködipolin synnyttämä kenttä värähtelee sinimuotoisesti ja muistuttaa tasoaaltoa paikallisesti (pienillä alueilla) kaukana säteilijästä: tasoaalto on hyvä radioaallon malli oikein käytettynä

Sinimuotoisen aallon kentät

- Aaltoyhtälön ratkaisuksi kävisi muotoa

$$E_y(x,t) = E_+ f(x-ct) + E_- g(x+ct) \quad (E_+, E_- \text{ vakioita})$$

oleva hyvinkäyttäytyvien funktioiden f, g lineaarikombinaatio (mitä eroa on funktioiden f ja g kuvaamilla aalloilla?)

- Kenttäratkaisupariksi käyvät sinimuotoiset (eli harmoniset) funktiot:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx - \omega t), \\ \vec{B}(x,t) &= \hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t), \quad \text{missä} \quad E_{\max} = c B_{\max} \end{aligned}}$$

  - Värähtelyn **kulmataajuus** $\omega = 2\pi f$ ($[\omega] = \mathrm{rad/s}$)
  - Kun tutkitaan yhtälöä $kx - \omega t = 0$ (eli yhden aallonharjan etenemistä), huomataan, että aalto etenee $+x$**-suuntaan nopeudella**

$$\boxed{v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \omega/k = c}$$

Sinimuotoisen aallon kentät

Jatkoa

- Kenttäratkaisuparissa

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \hat{\jmath}E_{\max}\cos(kx-\omega t),\\ \vec{B}(x,t) &= \hat{k}B_{\max}\cos(kx-\omega t), \quad \text{missä} \quad E_{\max} = cB_{\max}\end{aligned}}$$

  - kentät ovat kohtisuorassa toisiaan ja etenemissuuntaa vastaan (ovat **poikittaisia)**
  - $\vec{E}(x,t)$ ja $\vec{B}(x,t)$ ovat sähkö- ja magneettikentän hetkellisarvot
  - $E_{\max}$ ja $B_{\max}$ ovat kenttien maksimiarvot eli **amplitudit**
  - kahden aallonharjan välimatka (valitulla hetkellä) eli **aallonpituus**

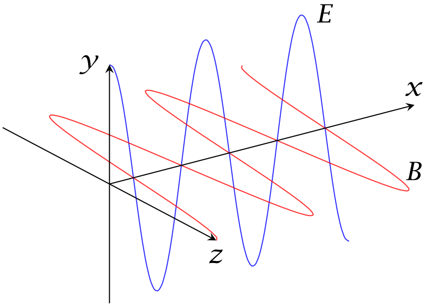
$$\boxed{\lambda = 2\pi/k = c/f \quad \Longleftrightarrow \quad c = \lambda f}$$

missä **aaltoluku** $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \omega/c}$ ($[k] = \mathrm{rad/m}$; huomaa ero k vs. $\hat{k}$)

Sinimuotoiset sähkömagneettiset aallot

- Valitut $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ riippuvat siis sinimuotoisesti ajasta ja paikasta
- Aalto on **tasoaalto:** valitulla hetkellä, valitulla etenemissuuntaa vastaan kohtisuoralla tasolla $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat vakiovektoreita

(Kuvassa ovat edelliskalvon sinimuotoisen aallon kenttien hetkellisarvot x-akselilla, kun $t = 0$: E sininen, B punainen, etenemissuunta $+x$ eli oikealle.)



- Sähkömagneettisen aallon **polarisaatio** tutkitaan $\vec{E}$-vektorista
- Esimerkkiaalto on **lineaarisesti polarisoitunut** y-suuntaan (sähkökenttävektorin kärki piirtää viivaa joka pisteessä, kun aika kuluu)

- Vastaavasti $-x$-suuntaan etenevä aalto olisi

$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx + \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = -\hat{k} B_{\max} \cos(kx + \omega t)$$

Sähkömagneettisen aallon nopeus väliaineessa

- Aiempi tyhjiölle tehty analyysi pätee johtamattomassa eristeessäkin, kunhan Maxwellin yhtälöissä vaihdetaan $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ ja $\mu_0 \to \mu$
- $\varepsilon = K\varepsilon_0$ ja $\mu = K_\mathrm{m}\mu_0$, ja aallon nopeus eristeessä muuttuu $c \to v$:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_\mathrm{m}}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_\mathrm{m}}}}$$

- Tyypillisesti (etenkin optisella alueella) $K_\mathrm{m} \approx 1 \implies v = c/\sqrt{K}$
- Koska $K > 1$, väliaineessa $v < c$
- Nopeuksien suhde on **taitekerroin** $\boxed{n = \frac{c}{v} = \sqrt{KK_\mathrm{m}} \overset{K_\mathrm{m}\approx 1}{\approx} \sqrt{K}}$
- Edelleen $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = (\omega/c)\sqrt{KK_\mathrm{m}} = \omega/v = 2\pi/\lambda \implies \boxed{v = \lambda f}$
- Lisäksi $\boxed{E = vB = cB/n}$

Yleisempi sinimuotoinen tasoaalto

(Lisäys oppikirjan tekstiin)

- Harmonisen tasoaallon sähkökenttä pisteessä $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ voidaan kirjoittaa

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \text{missä } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

- $\vec{k}$ on **aaltovektori;** tasot $\vec{k} \cdot \vec{r} =$ vakio ovat aallon vakiovaihepintoja
- Voidaan kirjoittaa $\vec{k} = \hat{u}k$, missä yksikkövektori $\hat{u} = \vec{k}/k$ osoittaa aallon etenemissuuntaan ja k on aaltoluku
  - Huomaa: $\hat{k}$ tarkoittaa edelleen yhtä karteesisen koordinaatiston yksikkövektoreista, ja vain silloin, kun aalto etenee $+z$-suuntaan, $\hat{u} = \hat{k}$
- Ampèren ja Faradayn laeista seuraa dispersioehto $\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$
- Aallonpituus on λ, taajuus $f = 1/T$ (T on jaksonaika) ja kulmataajuus $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Häviöttömässä aineessa etenevän homogeenisen tasoaallon $k = 2\pi/\lambda$
- Yhtälö $v = \lambda f = \omega/k$ pätee etenemissuunnasta riippumatta
  - Esimerkiksi $100\,\mathrm{MHz}$:n radiolähetyksen aallonpituus vapaassa tilassa $\lambda = c/f \approx 3\,\mathrm{m}$ (hyvä kiintopiste lukuarvoille)

Sähkömagneettisten aaltojen energiatiheys

- Sähkömagneettisiin aaltoihin liittyy energiaa: ajattele kesäisen auringonpaisteen lämmittävyyttä
- Aikaisemmin johdettiin $\vec{E}$- ja $\vec{B}$-kenttien energiatiheydet tyhjiössä:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_E \quad \text{(sähkökentän energiatiheys tyhjiössä)}$$

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_B \quad \text{(magneettikentän energiatiheys tyhjiössä)}$$

- Yhdistämällä nämä saadaan aallon energiatiheys tyhjiössä:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

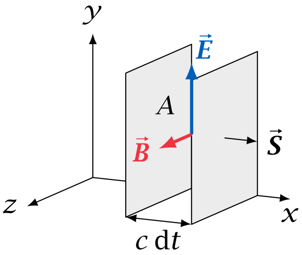
- Toisaalta $B = E/c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E$, joten aallon $\vec{E}$- ja $\vec{B}$-kentän energiatiheys on sama:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E\right)^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Sähkömagneettisen aallon energiankuljetus

- Tasoaalto edetköön $+x$-suuntaan
- Ajassa $\mathrm{d}t$ aaltorintama etenee matkan $c\,\mathrm{d}t$
- Energiaa siirtyy kiinteän pinta-alan A läpi määrä

$$\mathrm{d}U = u\,\mathrm{d}V = (\varepsilon_0 E^2)(Ac\,\mathrm{d}t)$$



- Energiavirtaus S aika- ja pinta-alayksikköä kohden **(tehotiheys)**

$$S = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 c E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{EB}{\mu_0}, \quad [S] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\,m^2}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \qquad \text{(tyhjiössä)}$$

- Huomaa: S on paikallinen ja hetkellinen suure

Poyntingin vektori

- Määritellään energiavirtauksen suuruuden ja kulkusuunnan ilmaiseva **Poyntingin vektori:**

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}}$$

(Poyntingin vektori tyhjiössä)

- Kokonaisteho suljetun pinnan läpi

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

- Jos kentät $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ ovat sinimuotoisia aiemmin esitetyn mukaisesti,

$$\vec{S}(x, t) = \hat{\imath}\frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0}\left[1 + \cos 2(kx - \omega t)\right]$$

Intensiteetti

- Usein sähkömageettisten aaltojen taajuus on niin suuri (esim. näkyvällä valolla $\sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$), ettei ole mieltä mitata aikariippuvaa Poyntingin vektoria vaan vektorin aikakeskiarvoa $\langle\bullet\rangle$ **(netto**arvoa)
- Sinimuotoisen aallon Poyntingin vektorin aikakeskiarvon suuruus on

$$S_{\mathrm{av}} = \left|\left\langle \vec{S}(x,t)\right\rangle\right| = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0}\langle[1+\cos 2(kx-\omega t)]\rangle = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0},$$

  koska kosinitermin aikakeskiarvo yhden jakson aikana on nolla
- Oppikirjassa (ja kurssilla) em. aikakeskiarvosta käytetään nimitystä **intensiteetti** (I), joka on kovin monella merkityksellä rasitettu sana – varmistu aina, mitä intensiteetillä eri yhteyksissä tarkoitetaan.
- Sinimuotoisen aallon **intensiteetti tyhjiössä** (entä väliaineessa?) on

$$\boxed{I \overset{\mathrm{def}}{=} S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}} \qquad (\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\,\Omega)$$

Sähkömagneettisten aaltojen liikemäärä

- Sähkömagneettiset aallot kuljettavat energian lisäksi myös liikemäärää p (erityinen suhteellisuusteoria: energia$^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$; jos $m = 0$, kuten fotoneilla, energia $= pc \implies p =$ energia$/c$)
- Liikemäärätiheys $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \dfrac{\mathrm{d}(\text{energia})}{c\,\mathrm{d}V} = \dfrac{u\,\mathrm{d}V}{c\,\mathrm{d}V} = \dfrac{u}{c} = \dfrac{EB}{\mu_0 c^2} = \dfrac{S}{c^2}$
- **Liikemäärävirtaama** pinta-alayksikköä kohden $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}t}{A} = \dfrac{S}{c} = \dfrac{EB}{\mu_0 c}}$
- Liikemäärävirtaus aiheuttaa pinnoille **säteilypaineen** p_{rad} [merkintä!]
  - Jos aalto absorboituu täydellisesti pintaan,

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{\langle \mathrm{d}p/\mathrm{d}t \rangle}{A} = \frac{S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{I}{c}$$

  - Jos aalto heijastuu pinnasta, liikemäärän muutos on kaksinkertainen:

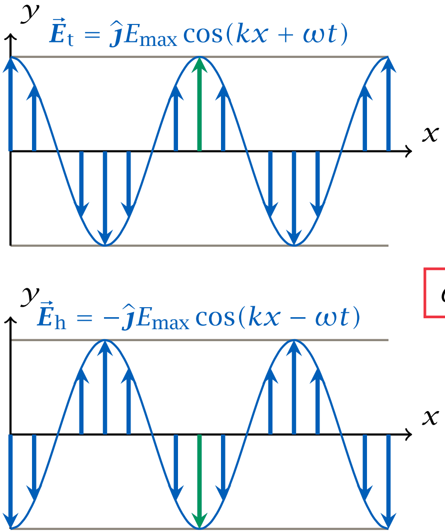
$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{2I}{c}$$

(Pintojen valaisusta puhuttaessa intensiteettiä parempi termi olisi **säteilytysvoimakkuus** eli **irradianssi**.)

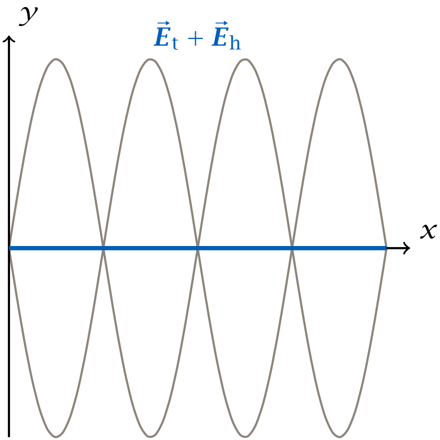
Aallon heijastuminen johteen pinnalta

- Oletetaan, että tasoaalto osuu ideaalijohteen pintaan (esim. aiempi $-x$-suuntaan etenevä esimerkkiaalto osuu johteeseen yz-tasolla)
- Tulevalla aallolla on nollasta poikkeava sähkökenttä, mutta johteen pinnalla kokonaissähkökentän pitää hävitä (miksi?) – miten vaatimus toteutuu?
- Tulevan aallon sähkökenttä indusoi johteen pinnalle sellaisen värähtelevän virran, jonka sähkökenttä kumoaa tulevan aallon sähkökentän johteen pinnalla
- Värähtelevä virta lisäksi tuottaa heijastuneen aallon, joka etenee pinnasta poispäin ($+x$-suuntaan)
- Tulevan ja heijastuneen aallon superpositio on **seisova aalto**
- Kahden heijastavan pinnan muodostama rakenne on tärkeä esimerkiksi optiikan sovelluksissa ja lasereissa (optinen resonaattori, kuten Fabry–Pérot-ontelo)

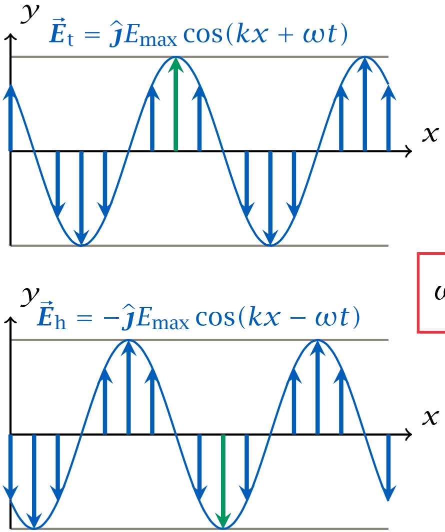
Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



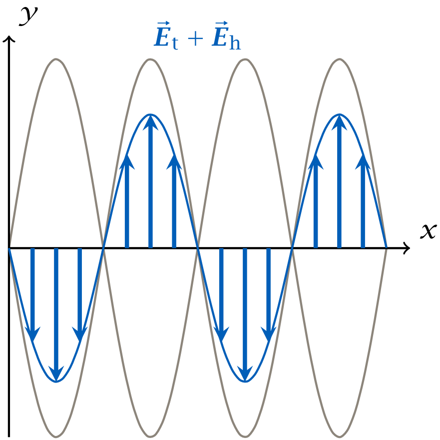
$\boxed{\omega t = 0}$



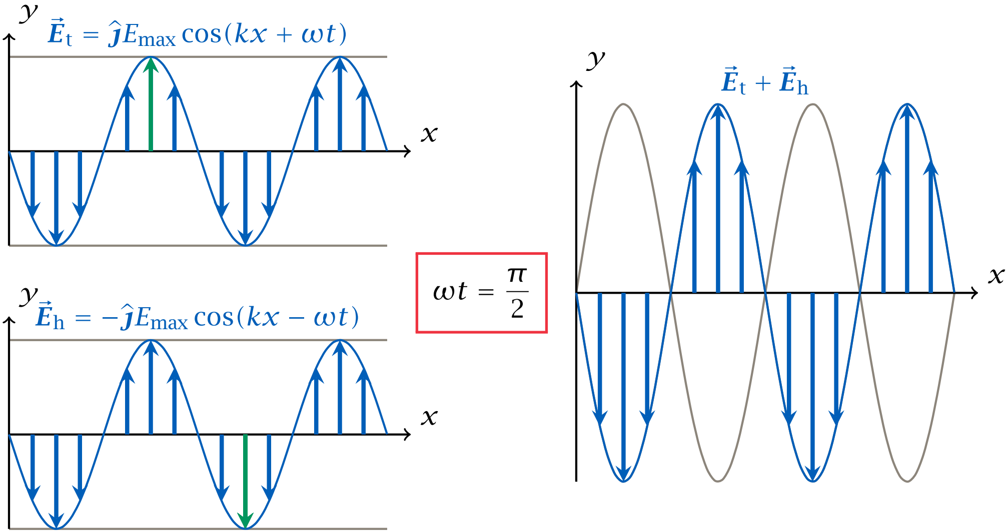
Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



$$\boxed{\omega t = \frac{\pi}{4}}$$



Tuleva aalto + heijastunut aalto = seisova aalto



$$\boxed{\omega t = \frac{\pi}{2}}$$

Kenttien superpositio

- Ideaalijohde olkoon tasolla $x = 0$, tuleva aalto edetköön $-x$-suuntaan
- Superpositioaallot ovat (ensimmäinen termi on tuleva aalto, toinen heijastunut – huomaa polarisaatiosuunnat)

$$
\begin{aligned}
E_y(x,t) &= E_{\max}\left[\cos(kx+\omega t) - \cos(kx-\omega t)\right] \\
B_z(x,t) &= B_{\max}\left[-\cos(kx+\omega t) - \cos(kx-\omega t)\right]
\end{aligned}
$$

- Sovelletaan identiteettiä $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, jolloin saadaan lopulta

$$
\begin{aligned}
E_y(x,t) &= -2E_{\max} \sin kx \sin \omega t \\
B_z(x,t) &= -2B_{\max} \cos kx \cos \omega t,
\end{aligned}
$$

- Saadut lausekkeet ovat muotoa $y(x,t) = (A_{\mathrm{SW}} \sin kx) \cos \omega t$, joka on tuttu Mekaniikasta

Kenttien superpositio

Jatkoa

- Kentällä on nollakohdat **solmutasoilla:**

$$E_y(x,t) = 0, \quad \text{kun} \quad x = \frac{n\lambda}{2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$B_z(x,t) = 0, \quad \text{kun} \quad x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Solmutasojen puolivälissä kuputasoilla kentällä on maksimiarvo
- Tasolla $x = 0$ sähkökenttä häviää (kuten pitääkin) mutta magneettikentällä on maksimi
- Joka paikassa sähkö- ja magneettikenttä värähtelevät $90°$:een vaihe-erossa ajan suhteen (toisin kuin etenevällä aallolla, jonka kentät ovat samanvaiheiset)
- Toteutuvatko Maxwellin yhtälöt?

Seisovan aallon intensiteetti

- Etsitään ensin Poyntingin vektorin hetkellisarvo:

$$\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[-2\hat{\jmath}E_{\max}\sin kx \sin \omega t\right] \times \left[-2\hat{k}B_{\max}\cos kx \cos \omega t\right]$$

$$= \hat{\imath}\frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin 2kx \sin 2\omega t = \hat{\imath}S_x(x,t)$$

- Aallon intensiteetti I on Poyntingin vektorin aikakeskiarvon suuruus S_{av}
- S_{av} häviää, koska $\sin 2\omega t$:n aikakeskiarvo (yhden jakson yli) on nolla

$\Longrightarrow$ seisova aalto ei kuljeta nettoenergiaa, koska seisovassa aallossa on kaksi vastakkaisiin suuntiin yhtä paljon energiaa kuljettavaa osa-aaltoa

Seisovat aallot ontelossa

- Kahden heijastavan, yhdensuuntaisen pinnan (etäisyys L) välissä on seisova aalto, jos sähkökenttä häviää molemmilla pinnoilla eli jos aallonpitudet ovat

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Vastaavat aallon taajuudet ovat

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Ehtojen mukaiset seisovat aallot ovat rakenteen normaali- eli ominaismuotoja
- Mikroaaltouuni: tyypillinen magnetronin käyttötaajuus on $2.45\,\mathrm{GHz}$
  - Vesimolekyylit vastaanottavat energiaa tällä taajuudella ns. rotaatioabsorption takia
  - Absorptio kuitenkin heikkoa, mikä on hyvä asia – miksi?
  - (Kotitalous)mikroaaltouunit ovat kokoluokkaa $30\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$ ja seinämät ovat metallia – miksi uunissa on pyörivä lautanen?

Yhteenveto luvusta 32

Askeltasoaalto tyhjiössä

$$E = cB, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \vec{E} \times \vec{B} \upuparrows \vec{c}$$

Aaltorintama etenee nopeudella c

Sinimuotoinen tasoaalto $+x$-suuntaan

$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx - \omega t),$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t),$$

missä amplitudit $E_{\max} = cB_{\max}$ ja komponentit E_y, B_z toteuttavat sähkömagneettisen aaltoyhtälön.

Aallonpituus $\lambda = 2\pi/k$
Aaltoluku $k = \omega/c$
Kulmataajuus $\omega = 2\pi f$
Taajuus $f = c/\lambda$

Tasoaalto ei-johtavassa väliaineessa

Taitekerroin $n = c/v \geq 1$

Väliaineessa etenemisnopeus $v = c/n$ (edellisiin kaavoihin $c \to v$)

Poyntingin vektori ja intensiteetti

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}, \quad I = S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu}$$

Säteilypaine

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{\langle \mathrm{d}p/\mathrm{d}t \rangle}{A} = \frac{I}{c} \quad \text{tai} \quad \frac{2I}{c}$$

Seisova aalto = tuleva aalto + heijastunut aalto