Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

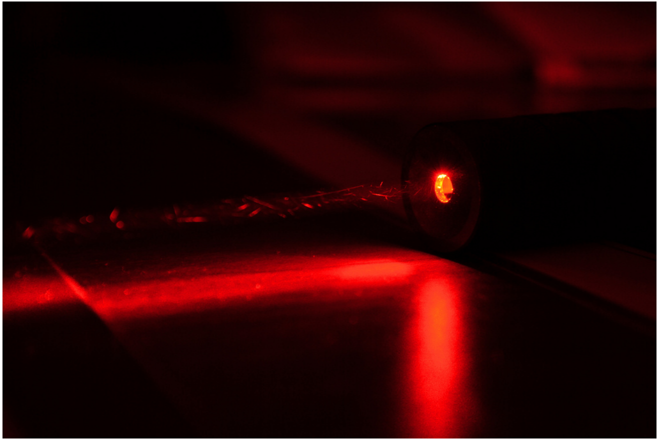
Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 9

Valon luonne ja eteneminen (YF 33)
- Valon luonne
- Heijastuminen ja taittuminen
- Kokonaisheijastus
- Dispersio
- Polarisaatio
- Valon sironta
- Huygensin periaate
- Yhteenveto

Kenttien rajapintaehdot (lisämateriaalia)
- Rajapintaehdot
- Fresnelin kertoimet

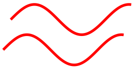


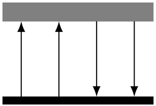
Lähde: https://www.flickr.com/photos/fastlizard4/5427856900/in/set-72157626537669172, Andrew "FastLizard4" Adams [CC BY-SA 2.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/)]

Tavoitteena on oppia

- mitä valonsäteet ovat ja miten ne liittyvät aaltorintamiin
- valon heijastumista ja taittumista ohjaavat lait
- olosuhteet, joissa valo kokonaisheijastuu rajapinnasta
- mitä dispersio ja polarisaatio tarkoittaa
- miten tavallisesta valosta tehdään polarisoitunutta
- miten Malusin laki käytetään
- miten Huygensin periaate auttaa heijastuksen ja taittumisen analysoinnissa
- (tunnistamaan $\vec{E}$- ja $\vec{B}$-kenttien rajapintaehdot)
- (tunnistamaan Fresnelin kertoimet, kun aalto osuu kohtisuorasti rajapintaan)

Valon luonne: aallot ja hiukkaset



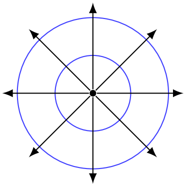


- Valo on sähkömagneettista säteilyä
- Aalto-hiukkasdualismi: (Newtonin aikaan asti) valo on hiukkasia (korpuskeleita) → (Newtonin jälkeen, erityisesti Maxwell) valo on aaltoliikettä → (∼1910) valo on hiukkasia (fotoni, kvantti) → (∼1930) valo on sekä aaltoja että hiukkasia (kvanttielektrodynamiikka, QED)
- Eteneminen kuvataan aalloilla, vuorovaikutus aineen kanssa (absorptio ja emissio) hiukkasilla
- Säteilyn peruslähde on kiihtyvässä liikkeessä oleva varaus

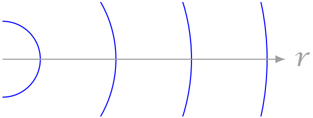
Valonlähteet

- Lämpimien kappaleiden molekyylit säteilevät sähkömagneettisia aaltoja eli **lämpösäteilyä** molekyylien lämpöliikkeen vuoksi – jokainen lämmin kappale on ”valon”lähde
- Hehkulampussa valoa tuottaa kuuma hehkulanka (n. $2700\,\mathrm{K}$)
- Loistelampussa elohopeahöyryn läpi kulkee valokaari (läpilyöntipurkaus), jonka ultraviolettisäteily muuntuu putken pinnan loisteaineessa näkyväksi valoksi
- LED-lampussa valodiodin puolijohdeliitoksen aukko-elektroniparien yhtyessä liitos säteilee fotoneja
- Useimmissa valonlähteissä säteilijät (atomit, molekyylit) säteilevät itsenäisesti, mutta **laserissa** atomit houkutellaan säteilemään yhtenäisesti eli **koherentisti** – tulos on kapea, intensiivinen ja lähes **yksitaajuinen** (monokromaattinen, yksivärinen) valokeila
- Valonnopeus $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \implies$ metrin määritelmä

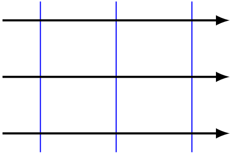
Aallot, aaltorintamat ja säteet



- Aallon liikettä kuvataan usein aaltorintamalla (esim. aallon etureuna)
- Yleisesti **aaltorintama** on pinta, jolla aaltoon liittyvän värähtelyn **vaihe on vakio** (esim. harmonisesti värähtelevän sähkökentän vakiovaihepinnat)

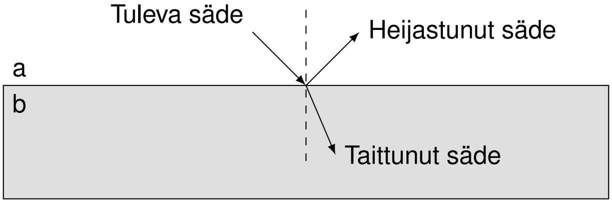


- Valonlähteet ovat usein liki pistemäisiä $\Longrightarrow$ aaltorintamat ovat pallopintoja
- Matemaattisessa kuvauksessa käytetään mieluusti tasoaaltoja
  - Kaukana lähteestä tasoaalto on hyvä approksimaatio palloaallolle
  - Matematiikka on yksinkertaisempaa



- **Säde** on viiva, joka ilmaisee aallon kulkusuunnan ($\hat{=}$ aaltovektori $\vec{k}$) ja on aaltorintaman normaali
- Homogeenisessa isotrooppisessa aineessa säteet ovat suoria
- **Geometrinen optiikka** (sädeoptiikka) käsittelee aaltoja säteinä

Heijastuminen



- Kun sähkömagneettinen aalto (valo) osuu kahden läpinäkyvän aineen tasaiseen rajapintaan, aalto yleensä osittain **heijastuu** pinnasta ja osittain **taittuu** toiseen aineeseen
- Heijastus tasaisesta pinnasta on **peiliheijastus** (valo heijastuu tiettyyn suuntaan)
- Heijastus karheasta pinnasta on **hajaheijastus** (valoa siroaa moniin suuntiin)
- Jatkossa heijastus $\hat{=}$ peiliheijastus

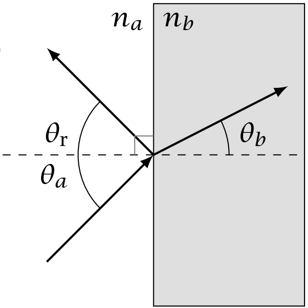
Heijastumis- ja taittumislait

- **Aineen taitekerroin**

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

(huomaa: yksikötön)

(kuvassa $n_a < n_b$)



- **Heijastumis- ja taittumislait**
  1. Tuleva, heijastunut ja taittunut säde ovat samassa tasossa pinnan normaalin kanssa (= **tulotaso)**
  2. **Heijastuskulma = tulokulma**

$$\boxed{\theta_r = \theta_a}$$

  3. **Snellin laki** tulo- ja **taittumiskulmille**

$$\boxed{n_a \sin\theta_a = n_b \sin\theta_b = \text{vakio yhdensuuntaisilla rajapinnoilla}}$$

Huomaa: kulmat mitataan pinnan normaalista!

Heijastumis- ja taittumislakien seurauksia

- ”Aalto taittuu optisesti tiheämpään aineeseen päin” (optisesti tiheämpi = suurempi taitekerroin)
- Kohtisuorasti ($\theta_a = 0$) rajapintaan tuleva säde ei taitu ($\theta_b = 0$) vaan jatkaa suoraan (entä heijastus?)
- Tulevan ja läpäisseen (taittuneen) säteen kulkusuunnat ovat käännettävissä (heijastunut säde syntyy tietysti tulopuolelle)
- Mistä lait tulevat?
  - Heijastus- ja taittumislait voidaan johtaa Maxwellin yhtälöistä, jolloin lisäksi saadaan tietoa kenttien amplitudien, vaiheiden ja polarisaatioiden käyttäytymisestä rajapinnassa (Fresnelin kertoimet)
  - Lait voidaan johtaa Huygensin periaatteesta (tulossa)
  - Käytössä on myös Fermat’n periaate, jonka mukaan valo kulkee kahden pisteen välillä nopeinta (tai hitainta) mahdollista reittiä pitkin (”optisen matkan täytyy olla ääriarvo”) – harjoitustehtävä

Taitekerroin ja valon aaltoluonne

- Tyypillisesti epämagneettisen aineen taitekerroin $n = \sqrt{K}$ on välillä 1…3, esim. ($\lambda_0 = 589\,\mathrm{nm}$) vesi 1.333, jää 1.309, timantti 2.417; STP-ilma 1.0003 (eli $= 1$)
- Taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta **(= dispersio)** (esim. pienillä taajuuksilla veden taitekerroin onkin 8.97)
- Kun aalto kulkee aineesta toiseen, aallon **taajuus säilyy** (mieti kättelemistä) – rajapinta ei synnytä eikä tuhoa aaltoja
- Valon nopeus ja aallonpituus muuttuvat väliaineessa:

$$\boxed{v = \frac{c}{n} \quad \text{ja} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

(λ_0 on valon aallonpituus tyhjiössä)

Kokonaisheijastus

- Snellin laki: valon taittumiskulma

$$\sin\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\sin\theta_a$$

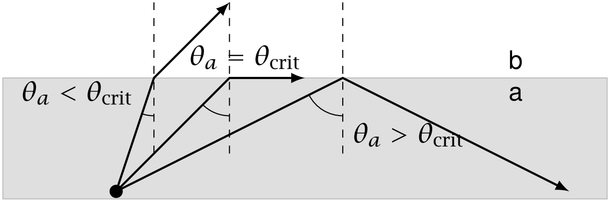
- Jos $n_a/n_b > 1$, aina $\theta_b > \theta_a \quad \Longrightarrow \quad$ on olemassa tulokulma θ_{crit}, jolla $\sin\theta_b = 1$ eli taittunut säde kulkee pitkin rajapintaa ($\theta_b = 90°$):

$$\boxed{\sin\theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a}\sin 90° = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{(kun } n_a > n_b\text{)}}$$

- Kun $\theta_a > \theta_{\text{crit}}$, tuleva säde* ei pääse aineeseen b vaan heijastuu: kyseessä on **kokonaisheijastus**

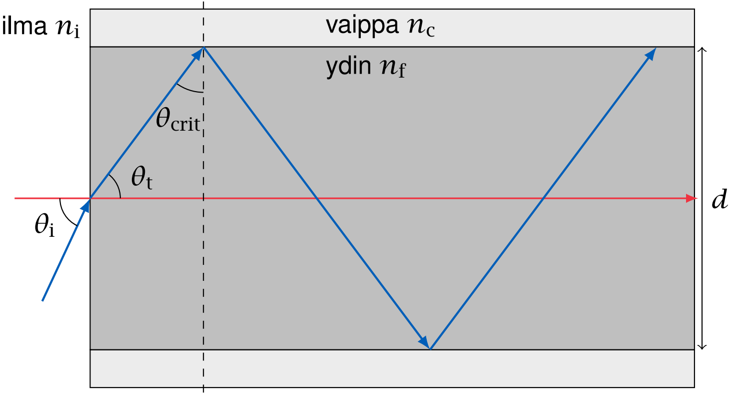
(*entä kentät?)

- θ_{crit} on **kokonaisheijastuksen rajakulma** (esim. lasi–ilma $\theta_{\text{crit}} \approx 41.1°$)



Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Yksinkertainen esimerkkirakenne

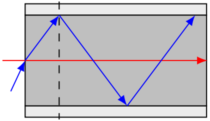


Rajatapaus: suurin tulokulma θ_i, jolla säde pysyy kuidussa kokonaisheijastuksen avulla.

Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Jatkoa

- Valo ohjautuu kuidussa kokonaisheijastuksen avulla
- Valo kulkee pitkiäkin matkoja merkittävästi heikentymättä



- Kuidun vaimennus (tehohäviötaso) on suuruusluokkaa $1\,\mathrm{dB}/\mathrm{km}$, erikoiskuiduissa parempi
- Lasketaan yksinkertainen malli tiedonsiirtonopeuden ylärajalle ns. monimuotokuidussa (joita ei todellisuudessa käytetä)
- Hitaimman (kulkukulma θ_t akseliin nähden) ja nopeimman (akselin suuntaisen) valonsäteen kulkuaikaero matkalla L on

$$\Delta t = t_{\mathrm{max}} - t_{\mathrm{min}} = \frac{L}{v\cos\theta_\mathrm{t}} - \frac{L}{v}$$

Johdatus optiseen tietoliikenteeseen – valokuitu

Jatkoa: moodidispersio

- Kulkusuunta θ_t kytkeytyy kokonaisheijastuksen rajakulmaan θ_crit:

$$n_\mathrm{f} \sin\theta_\mathrm{crit} = n_\mathrm{c}, \ \theta_\mathrm{t} = \pi/2 - \theta_\mathrm{crit} \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta_\mathrm{t} = \frac{n_\mathrm{c}}{n_\mathrm{f}}$$

- Valon kulkunopeus ytimessä $v = c/n_\mathrm{f}$, joten

$$\Delta t = \frac{L n_\mathrm{f}}{c}\left[\frac{n_\mathrm{f}}{n_\mathrm{c}} - 1\right]$$

  = impulssin pituus matkan L jälkeen
- Pulssien etäisyyden on oltava esim. $2\Delta t$, jotta peräkkäiset pulssit voidaan erottaa toisistaan matkan L jälkeen:

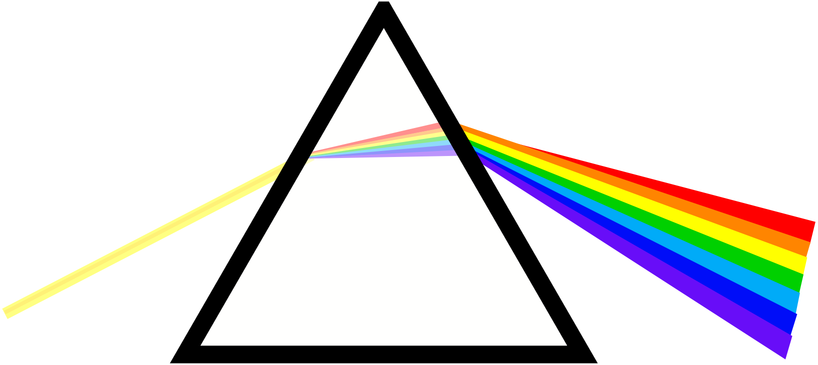
$$\text{maksimitoistotaajuus } f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{c}{2L n_\mathrm{f}(n_\mathrm{f}/n_\mathrm{c} - 1)}$$

- (Maksimitoistotaajuus on yleensä datakäyttöön aivan liian pieni tällä rakenteella $\longrightarrow$ jatkuvasti muuttuva taitekerroinprofiili tai ohut ns. yksimuotokuitu)

Taitekerroin riippuu taajuudesta

- Optiikassa perusmateriaaliparametri on taitekerroin
- Valon nopeus materiassa riippuu aina taajuudesta $\Longrightarrow$ taitekerroin aineessa riippuu taajuudesta $\Longrightarrow$ eritaajuiset signaalikomponentit kulkevat eri nopeuksilla = **dispersio** $\Longrightarrow$ signaalin aaltomuoto muuttuu
- Tyypillisesti optisissa materiaaleissa taitekerroin pienenee taajuuden pienentyessä (vapaantilan aallonpituuden kasvaessa)
  - = **normaali** dispersio
- Joskus taitekerroin kasvaa taajuuden pienentyessä
  - = anomaalinen dispersio
- Dispersio rajoittaa optisten komponenttien suorituskykyä (esim. ultranopeassa optisessa tiedonsiirrossa)

Prisma



- Prisman lasissa pitkäaaltoinen punainen valo taittuu vähiten ja lyhytaaltoinen violetti eniten
- Valo hajaantuu (dispergoituu) **spektriksi**
- Dispersio selittää myös timanttien väriloiston ja sateenkaaren värit

Polarisaatio

- Polarisaatio on poikittaisen aaltoliikkeen ominaisuus (poikittaisella poikkeamalla on suunta)
  [eristeen polarisoituminen on eri ilmiö]
- Sähkömagneettisen aallon polarisaatio = **$\vec{E}$-vektorin suunta ja käytös;** esimerkiksi tasoaalto

$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_{\max} \cos(kx - \omega t),$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

  on **lineaarisesti** polarisoitunut **y-suuntaan**
- Radiolähettimen antennin tai yksittäisen molekyylin säteilemällä aallolla on yleensä tietty polarisaatiotila (esim. lineaarinen polarisaatio, mutta tila voi olla erilainen eri suunnissa)
- Valonlähteet (hehkulamppu, loistelamppu, aurinko) lähettävät tyypillisesti **polarisoitumatonta** eli **luonnonvaloa** (koska säteilijät ovat satunnaissuuntaisia)
  = valossa on kaikkiin poikittaissuuntiin lineaarisesti polarisoituneita aaltoja
  $\Longrightarrow$ polarisoidun valon tuottamiseen tarvitaan polarisoiva suodatin

Polarisaatiokäsitteitä

Lineaarisesti polarisoitu[nut] kenttävektori värähtelee [poikittaisesti] vakiosuuntaista janaa pitkin

Polarisaattori optinen komponentti, jonka läpi pääsevät vain tietyllä polarisaatiolla saapuvat aallot (mikroaalloilla: metalliritilä – ritilän lankojen suuntainen sähkökenttä ei pääse läpi)

Dikroismi [tässä:] materiaali absorboi (imee) yhtä polarisaatiokomponenttia voimakkaammin kuin toista (kohtisuoraa) komponenttia

Polarisoiva akseli aallot, jotka ovat polarisoituneet aineen tai rakenteen polarisoivan akselin suuntaisesti pääsevät läpi aineesta tai rakenteesta

Kahtaistaittavuus materiaalin taitekerroin riippuu aallon polarisaatiosuunnasta (hyödynnettävissä esim. ympyräpolarisaation tuottamisessa)

Polarisaattorien käyttö polarisoimisessa

- Polarisoitumattoman valon sähkökenttäkomponentti tarkastelusuunnassa on keskimäärin yhtäsuuri kuin komponentti kyseistä suuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa
- Ideaalinen polarisaattori päästää läpi puolet polarisoitumattoman valon tehotiheydestä: $I_{\mathrm{t}} = I_0/2$
- Lisätään toinen polarisaattori (analysaattori)
- Ensimmäisen polarisaattorin läpi päässeen sähkökentän E voi jakaa analysaattorin optisen akselin suhteen kohtisuoraan ($E_{\perp}$) ja yhdensuuntaiseen ($E_{\|}$) komponenttiin
- Analysaattorin läpi pääsee amplitudi $E_{\|} = E_{\mathrm{t}} \cos\phi$, missä ϕ on polarisaattorien polarisoivien akselien välinen kulma

$\Longrightarrow$ **Malusin laki** lineaarisesti polarisoituneelle valolle ($I_{\max}$ $[\equiv I_{\mathrm{t}}]$, kun $\phi = 0$):

$$I = S_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\max}^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I = I_{\max}\cos^2\phi}$$

Esimerkki Malusin lain käyttämisestä

Kolme polarisaattoria asetettu peräkkäin siten, että toisen polarisaattorin polarisoivan akselin kulma on θ ja kolmannen $90°$ ensimmäisen polarisaattorin optiseen akseliin verrattuna. Sisään tulee polarisoitumatonta valoa (intensiteetti I_0). Mikä on järjestelmän läpi menneen valon intensiteetti $I(\theta)$?

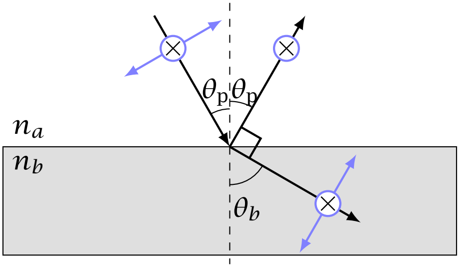
Ratkaisu: Ensimmäisen polarisaattorin läpäisee intensiteetti $I_0/2$. Toisen polarisaattorin jälkeen intensiteetti on $(I_0/2)\cos^2\theta$. Kolmannen polarisaattorin jälkeinen intensiteetti

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta\cos^2(90° - \theta) = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{I_0}{8}\sin^2(2\theta)$$

Maksimi-intensiteetti saadaan, kun $2\theta = 90° \implies \theta = 45°$ (valoa siis pääsee kolmisuodattimisen rakenteen läpi, vaikka pelkkä ensimmäisen ja kolmannen polarisaattorin yhdistelmä pysäyttäisi valonkulun kokonaan)

Heijastuksen käyttö polarisoimisessa

- Aallot, joiden $\vec{E}$-vektori on kohtisuorassa tulotasoa vastaan (eli joiden $\vec{E}$ on yhdensuuntainen heijastavan pinnan kanssa), heijastuvat voimakkaammin kuin aallot, joiden $\vec{E}$ on tulotasossa [tämä käy ilmi Fresnelin kertoimista]
- Jos valo saapuu rajapintaan **polarointikulmassa** θ_p, tulotasossa värähtelevä kenttäkomponentti ei heijastu lainkaan vaan läpäisee pinnan täysin (heijastunut valo on täysin polarisoitunutta ja läpäissyt valo on osittain polarisoitunutta)



pystypolarisaatio

vaakapolarisaatio

pystypolarisaatio

vaakapolarisaatio

Brewsterin kulma

- Heijastuksettomuusehto toteutuu, kun $\theta_b + \theta_\mathrm{p} = 90°$
- Snellin taittumislaista: $n_a \sin\theta_\mathrm{p} = n_b \sin(90° - \theta_\mathrm{p}) = n_b \cos\theta_\mathrm{p}$

$$\implies \boxed{\tan\theta_\mathrm{p} = \frac{n_b}{n_a}}$$

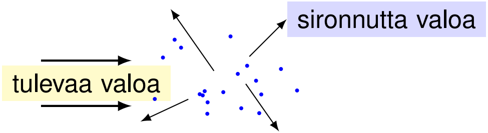
  = **Brewsterin laki** ja θ_p on **Brewsterin kulma**
  - Laki voidaan johtaa Maxwellin yhtälöistä, joista saadaan Fresnelin kertoimet eli sähkökenttäamplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet
- Polarointikulman fysikaalinen selitys?

Ympyrä- ja elliptinen polarisaatio

- **Ympyräpolarisoitu** aalto saadaan kahden kohtisuoraan suuntaan lineaarisesti polarisoidun aallon summana
  - Tarvitaan sama amplitudi ja $\pm\pi/2$:n (eli $90°$:een eli neljännesjakson) vaihe-ero
- Summa-aallon sähkökenttävektorin kärki kiertää ympyrää pitkin, kun katsotaan aallon tulosuuntaan
  - Vasen- ja oikeakätinen ympyräpolarisaatio (riippuu vertailusuunnasta?)
- Jos nollasta poikkeava vaihe-ero ei ole $\pm\pi/2$ tai kohtisuorien (erivaiheisten) komponenttiaaltojen amplitudit ovat eri suuret $\implies$ **elliptinen polarisaatio**
- Vaihe-ero voidaan tuottaa **kahtaistaittavalla** kiteellä (esim. kalsiitti $CaCO_3$ tai kvartsi)
- Kahtaistaittava **neljännesaaltolevy** tuottaa $\lambda/4$-vaihesiirron
  - Muuttaa lineaarisesti polarisoidun aallon ympyräpolarisoiduksi (ja päinvastoin)

Valon sironta

- Miksi taivas on sininen? Miksi auringonlasku on punainen? Miksi taivas näyttää joissakin suunnissa tummemmalta polarisoivien lasien läpi?
- Kun auringonvalo osuu ilman molekyyleihin, molekyylit eivät viritty, mutta niiden elektronipilvi värähtelee aallon sähkökentän suunnassa
  - $\Longrightarrow$ harmonisesti värähtelevä dipolimomentti
  - $\Longrightarrow$ dipolimomentti toimii antennina, joka lähettää uuden aallon ympärilleen (paitsi dipolin värähtelyn [akselin] suuntaan) = **sironta**

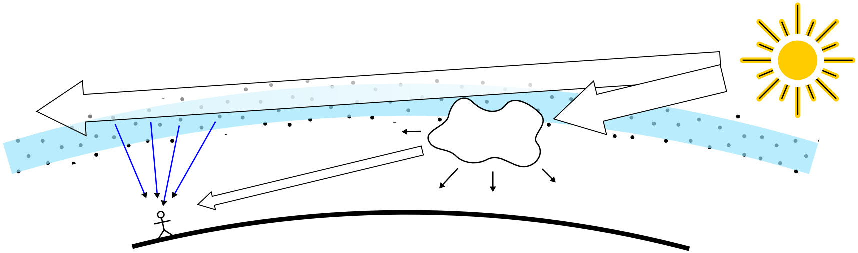


- Auringonvalo on polarisoitumatonta, mutta valonsäteen kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan sironnutta valoa tarkasteleva näkee lineaarisesti polarisoitunutta valoa (eli polarisoivien lasien kanssa. . . ?)
- Valon taajuus ei muutu sironnassa (koska ei tapahdu virittymistä)!


pystypolarisaatio


vaakapolarisaatio

Taivaan, auringonlaskun ja pilvien väri

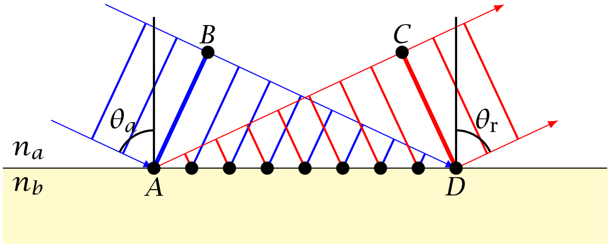


- Kun sirottajan koko $\ll \lambda$, kyseessä on Rayleigh'n sironta: sironnut intensiteetti $\sim 1/\lambda^4$ (eli $\sim f^4$)
  - $\Longrightarrow$ sininen valo siroaa n. 15 kertaa voimakkaammin kuin punainen
  - $\Longrightarrow$ taivaan väri
- Auringonlaskua seuraava näkee valoa, josta on sironnut pois sininen
- Tiheät pilvet sirottavat valoa moninkertaisesti joka suuntaan
  - $\Longrightarrow$ näkyvät valkoisina (vai pimentävät taivaan?)
- Maidon väri johtuu maidon rasvapallosista

Huygensin periaate (1678)

- **Huygensin periaate** ilmaisee, että jos tiedämme aaltorintaman muodon jollain hetkellä, voimme muodostaa sen perusteella rintaman myöhemmän muodon, eli: ***Jokainen aaltorintaman piste toimii lähteenä alkeisaalloille, jotka etenevät kaikkiin suuntiin aallon etenemisnopeudella***
  - Etenevän aaltorintaman uusi paikka myöhemmällä tarkasteluhetkellä on alkeisaaltojen yhteinen tangenttipinta eli verhopinta tuolla hetkellä
- Periaatteen avulla voi johtaa heijastumis- ja taittumislait
- Perustana mm. diffraktion ja interferenssin tai aukkoantennien (esim. parabolinen heijastinantenni) analyysille
- Johdettavissa Maxwellin yhtälöistä
  (esim. Lindell, I.V., "Huygens' principle in electromagnetics," IEE Proceedings Science, Measurement and Technology, vol. 143, no. 2, pp. 103–105, Mar 1996: `http://ieeexplore.ieee.org.libproxy.aalto.fi/xpl/articleDetails.jsp?tp=&arnumber=487647`)

Heijastuslaki Huygensin periaatteella



- Tuleva aaltorintama AB kohtaa rajapinnan pisteet eri aikoina
- Jokainen rajapinnan piste lähettää alkeisaallon (joka etenee nopeudella c/n_a)
- Alkeisaaltojen summa (verhopinta) muodostaa uuden aaltorintaman, joka etenee nopeudella $v_a = c/n_a$
- Kuvassa CD on AB:stä syntynyt heijastunut rintama, θ_a on tulokulma ja θ_r on heijastumiskulma (ohuet viivat ovat rintamien paikkoja eri hetkillä)

Heijastuslaki Huygensin periaatteella

Jatkoa

- Kun tuleva aaltorintama on kulkenut B:stä D:hen (ajassa t), pinnan pisteestä A lähteneet alkeisaallot ovat kulkeneet A:sta C:hen ja muodostavat muiden väliltä AD lähteneiden alkeisaaltojen kanssa rintaman CD:

$$t = \frac{|BD|}{v_a} = \frac{|AC|}{v_a} \quad \Longrightarrow \quad |BD| = |AC|$$

- Kuvasta saadaan kolmioiden avulla

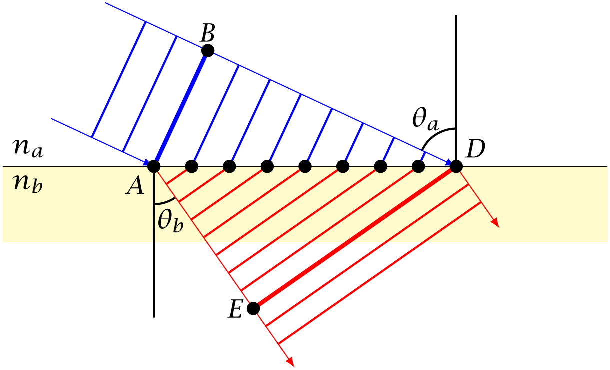
$$|BD| = |AD| \sin\theta_a, \quad |AC| = |AD| \sin\theta_\mathrm{r}$$

- Yhdistämällä päätelmät saadaan

$$\sin\theta_a = \sin\theta_\mathrm{r} \quad \Longrightarrow \quad \theta_a = \theta_\mathrm{r}\,,$$

mikä oli odotettu tulos

Taittumislaki Huygensin periaatteella



- Alkeisaallot etenevät läpäisypuolen materiaalissa nopeudella c/n_b
- Alkeisaallot muodostavat uuden aaltorintaman (nopeus $v_b = c/n_b$)
- AB:stä syntyy taittunut rintama ED; θ_a on tulokulma, θ_b taittumiskulma

Taittumislaki Huygensin periaatteella

Jatkoa

- Kun tuleva aaltorintama on kulkenut B:stä D:hen (ajassa t), pinnan pisteestä A lähteneet alkeisaallot ovat kulkeneet A:sta E:hen ja muodostavat muiden väliltä AD lähteneiden alkeisaaltojen kanssa rintaman ED:

$$t = \frac{|BD|}{v_a} = \frac{|AE|}{v_b} \quad \Longrightarrow \quad n_a|BD| = n_b|AE|$$

- Kuvasta saadaan kolmioiden avulla

$$|BD| = |AD|\sin\theta_a, \quad |AE| = |AD|\sin\theta_b$$

- Yhdistämällä päätelmät saadaan

$$n_a \sin\theta_a = n_b \sin\theta_b \, ,$$

mikä oli odotettu tulos

Yhteenveto luvusta 33

Keskeisiä käsitteitä

- Aaltorintama ja säde
- Aallon (valon) heijastuminen ja taittuminen
- Taitekerroin n (oli jo viime viikolla)
- Kokonaisheijastus
- Dispersio
- Polarisaatio, polarisaattori ja polarisoiva akseli
- Brewsterin kulma = polarointikulma

Tärkeitä kaavoja

Snellin laki

$$n_a \sin\theta_a = n_b \sin\theta_b$$

Kokonaisheijastuksen rajakulma

$$\sin\theta_{\mathrm{crit}} = \frac{n_b}{n_a}$$

Malusin laki

$$I = I_{\max} \cos^2\phi$$

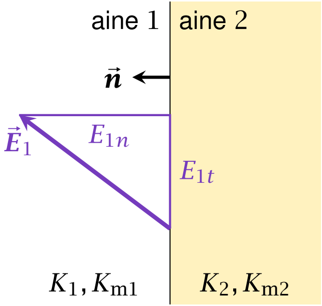
Brewsterin kulma

$$\tan\theta_{\mathrm{p}} = \frac{n_b}{n_a}$$

Kenttien rajapintaehdot (lisämateriaalia)

Kenttien rajapintaehdot

Alkuasetelma



- Alaindeksi 1 tai 2 kertoo kummassa aineessa kenttä on.
- Alaindeksi t tarkoittaa kentän tangentiaalikomponenttia rajapinnan suhteen ja alaindeksi n kentän normaalikomponenttia (yksikkövektorin $\hat{\boldsymbol{n}}$ suuntaan).
- Kenttien $\vec{\boldsymbol{E}}_1$, $\vec{\boldsymbol{B}}_1$, $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ ja $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ on toteutettava Maxwellin yhtälöt molemmin puolin rajapintaa.

Kenttien rajapintaehdot

Maxwellin yhtälöt

1. Magnetismin Gaussin laki

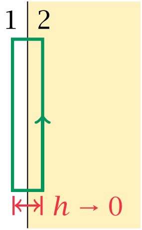
$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}}}$$

koska magneettikenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita.

2. Faradayn laki

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}}$$

Kuvan polun läpi menee nollavuo, kun $h \to 0$.



Kenttien rajapintaehdot

Maxwellin yhtälöt, jatkoa

3. Gaussin laki

$$\oint K\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{encl-free}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K_1 E_{1\mathrm{n}} = K_2 E_{2\mathrm{n}}}$$

kun rajapinnalla ei ole vapaata varausta. (Tarkastellaan rajapinnalla pillerirasiaa, jonka korkeus menee nollaan . . .)

4. Ampèren laki

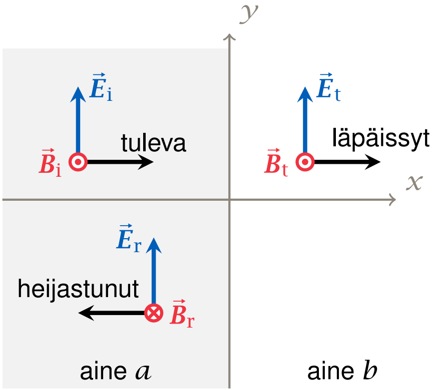
$$\oint \frac{1}{K_\mathrm{m}}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,(i_\mathrm{C} + i_\mathrm{D})_{\mathrm{encl}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_{1\mathrm{t}}/K_{\mathrm{m}1} = B_{2\mathrm{t}}/K_{\mathrm{m}2}}$$

kun rajapinnalla ei ole pintavirtaa. (Sama polku kuin Faradayn lain yhteydessä.)

Tässä oletettiin siis, että molemmat materiaalit ovat ei-johtavia. (Edellisen sivun ehdot ovat yleispäteviä.)

Amplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet

Kohtisuora heijastus ja läpäisy kahden ei-johtavan eristeen rajapinnassa



Yrite kolmella tasoaallolla:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_\mathrm{i}(x,t) &= +\hat{\jmath}\,E_\mathrm{i}\cos(k_a x - \omega t), && x \le 0 \\
\vec{E}_\mathrm{r}(x,t) &= +\hat{\jmath}\,E_\mathrm{r}\cos(k_a x + \omega t), && x \le 0 \\
\vec{E}_\mathrm{t}(x,t) &= +\hat{\jmath}\,E_\mathrm{t}\cos(k_b x - \omega t), && x \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_\mathrm{i}(x,t) &= +\hat{k}\,B_\mathrm{i}\cos(k_a x - \omega t), && x \le 0 \\
\vec{B}_\mathrm{r}(x,t) &= -\hat{k}\,B_\mathrm{r}\cos(k_a x + \omega t), && x \le 0 \\
\vec{B}_\mathrm{t}(x,t) &= +\hat{k}\,B_\mathrm{t}\cos(k_b x - \omega t), && x \ge 0
\end{aligned}
$$

Rajapinnalla $x = 0$ kokonaiskenttien on toteuttava rajapintaehdot kaikilla t. Tulevan tasoaallon amplitudi E_i (ja $B_\mathrm{i} = E_\mathrm{i}/v_a = n_a E_\mathrm{i}/c$) oletetaan tunnetuksi.

Amplitudin heijastus- ja läpäisykertoimet

Rajapintaehtojen tarkistus

- Sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentit ovat nollia $\implies$ rajapintaehdot ok.
- Tangentiaalinen $\vec{E}$ on jatkuva $\implies$

$$E_\mathrm{i} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{t} \tag{I}$$

- Tangentiaalinen $\vec{B}/K_\mathrm{m}$ on jatkuva $\implies$

$$B_\mathrm{i} - B_\mathrm{r} = B_\mathrm{t} \quad \Leftrightarrow \quad n_a E_\mathrm{i} - n_a E_\mathrm{r} = n_b E_\mathrm{t} \tag{II}$$

- Määritellään sähkökentän **heijastus-** ja **läpäisykertoimet** Γ ja τ,

$$\boxed{E_\mathrm{r} = \Gamma E_\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad E_\mathrm{t} = \tau E_\mathrm{i},}$$

ja ratkaistaan kertoimet yhtälöistä (I) ja (II) eli $1 + \Gamma = \tau$ ja $n_a - n_a\Gamma = n_b\tau$

Fresnelin kertoimet

- Kohtisuorasti rajapintaan tulevan aallon **Fresnelin kertoimet** eli sähkökentän heijastus- ja läpäisykertoimet ovat siis:

$$\boxed{\Gamma = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} \quad \text{ja} \quad \tau = \frac{2n_a}{n_a + n_b} = 1 + \Gamma}$$

(ei-johtava eristeaine)

(Ylikurssia:)

- Vinosti kahden ei-johtavan eristeaineen rajapintaan tuleva tasoaalto on jaettava tulotason kanssa yhdensuuntaisesti (∥) ja tulotasoa vastaan kohtisuorasti (⊥) lineaaripolarisoituneeseen komponenttiin
- Näiden kahden ominaispolarisaation Fresnelin kertoimet ovat

$$\Gamma_\perp = \frac{n_a \cos\theta_a - n_b \cos\theta_b}{n_a \cos\theta_a + n_b \cos\theta_b} \qquad \Gamma_\parallel = \frac{n_a \cos\theta_b - n_b \cos\theta_a}{n_a \cos\theta_b + n_b \cos\theta_a}$$

$$\tau_\perp = \frac{2n_a \cos\theta_a}{n_a \cos\theta_a + n_b \cos\theta_b} \qquad \tau_\parallel = \frac{2n_a \cos\theta_a}{n_a \cos\theta_b + n_b \cos\theta_a}$$

missä sähkökenttien suunnat on valittu yhtymään kohtisuoran tapauksen kanssa, kun $\theta_a = \theta_b = 0$

- Näistä ilmenee yhdessä Snellin lain kanssa mm. heijastuksen polaroivuus