



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

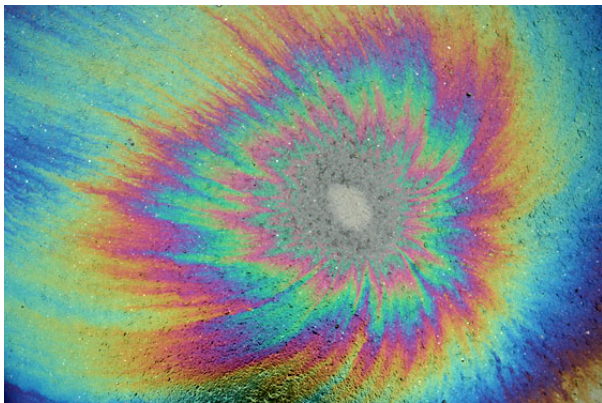
Luentoviikko 10

Interferenssi (YF 35)

Interferenssi ja koherentit lähteet
Kahden lähteen interferenssi
Interferenssikuvioiden intensiteetti
Interferenssi ohutkalvoissa
Michelsonin interferometri
Yhteenveto

Diffraktio (YF 36)

Fresnel- ja Fraunhofer-diffraktio
Diffraktio yhdestä raosta
Yhden raon kuvion intensiteetti
Monen raon diffraktio
Diffraktiohila
Röntgendiffraktio
Pyöreät aukot ja erotuskyky
Yhteenveto



Lähde: http://spiff.rit.edu/classes/phys312/workshops/w9b/dblslit/dblslit_long.html, Jeff Wignall

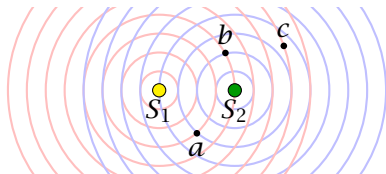
Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä tapahtuu, kun kaksi aaltoa yhtyy (interferoi)
- ▶ miten tulkita koherenttien valoaaltojen interferenssikuvioita
- ▶ miten interferenssikuvion eri kohtien intensiteetti määritetään
- ▶ miten ohutkalvointerferenssi syntyy
- ▶ miten interferenssiä voi käyttää erittäin pienten etäisyyksien mittaamiseen

Interferenssi kahdessa tai kolmessa dimensiossa

- ▶ **Interferenssi** viittaa tilanteeseen, jossa avaruudessa on useita aaltoja päällekkäin – tilanteen tarkastelu on **fysikaalista optikkaa**
- ▶ **Superpositioperiaatteen** mukaisesti aaltojen **poikkeamat** (displacement: amplitudi tai kenttävektori) voidaan **laskea yhteen joka pisteessä joka hetki** (mahdollista **linearisessa** väliaineessa)
- ▶ Interferenssi-ilmiöt erottuvat parhaiten yhdistämällä **yksitaajuisia** (monokromaattisia) **sininmuotoisia aaltoja** (tarkastellaan kahta **skalaarista** lähdettä S_1 ja S_2):

$$A_1 \cos(k_1 r_1 - \omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_2)$$



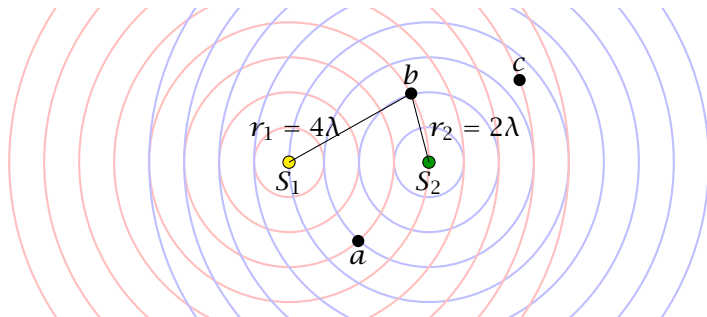
Koherentit lähteet

- ▶ Jos kahden yksitaajuisen sininmuotoisen lähteen taajuus on sama ja vaihe-ero on vakio ($\omega_1 = \omega_2$, $\delta_2 - \delta_1 = \text{vakio}$) lähteet ovat koherentteja ("vaihe"?), – tällaisen lähdeparin synnyttämät "aallot ovat koherentteja"
- ▶ Ääni- ja radiotekniikassa koherentteja lähteitä on helppo toteuttaa
- ▶ Valo muodostuu atomien (lämpöliikkeestä johtuvien) viritysten purkautumisesta
- ▶ Purkautumisen kesto tyypillisesti 10^{-8} s
- ▶ Purkaukset ovat riippumattomia toisistaan
 - ⇒ epäkoherentti ja ei-monokromaattinen valo; aurinko ja lamput lähettävät purskeista valoa (ilmassa purske on muutaman mikrometrin pituinen [= koherenssipituus])
- ▶ Laserissa viritysten purkautumiset riippuvat toisistaan
 - ⇒ koherentti ja (yleensä) monokromaattinen valo

Interferenssi ja matkaero

Sinimuotoiset identtiset lähteet

$$A \cos(kr_1 - \omega t + \delta) + A \cos(kr_2 - \omega t + \delta)$$



Vahvistava eli **konstruktivinen interferenssi** kun aallot ovat **samanvaiheiset** (esim. *a*, *b*)

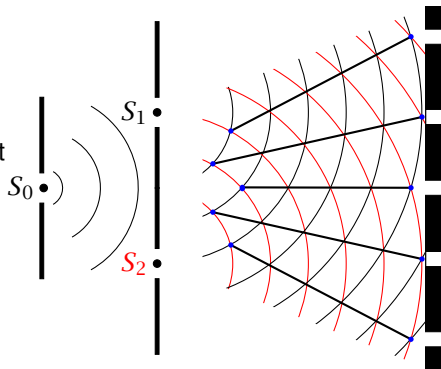
$$kr_2 - \omega t + \delta = kr_1 - \omega t + \delta + m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad r_2 - r_1 = \frac{m2\pi}{k} = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sammuttava eli **destruktivinen interferenssi** kun aallot ovat **vastakkaisvaiheiset** (esim, *c*)

$$kr_2 - \omega t + \delta = kr_1 - \omega t + \delta + (2m + 1)\pi \quad \Leftrightarrow \quad r_2 - r_1 = \frac{(2m + 1)\pi}{k} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Youngin kaksoisrakokoe (1800)

- ▶ Valaistetaan rakoja S_0 yksivärisellä valolla
- ▶ Raosta lähtevät (alkeis)aallot osuvat rakoihin S_1 ja S_2
- ▶ S_1 ja S_2 ovat koherentteja valonlähteitä
 - ⇒ interferenssikuvio (interferenssijuovia) varjostimella



Kaksoisraon interferenssiehdot

- ▶ Lähettimet **samassa vaiheessa**
- ▶ Aaltojen matkaero \Rightarrow vaihe-ero

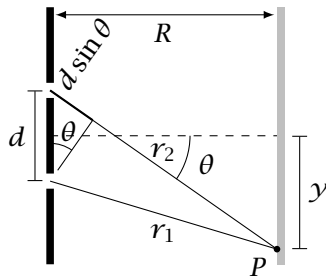
$$r_2 - r_1 \approx d \sin \theta, \text{ kun } r_1, r_2, R \gg d$$

- ▶ **Vahvistava interferenssi**, kun

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- ▶ **Sammuttava interferenssi**, kun

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

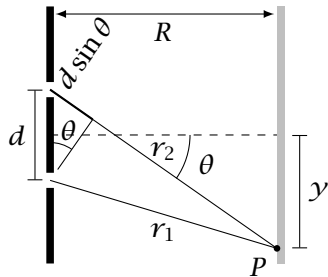


Kaksoisraon interferenssiehdot

Jatkoa

- ▶ Maksimikohtien sijainnit varjostimella:
 $y_m = R \tan \theta_m$
- ▶ **Pienillä kulmilla** $\tan \theta \approx \sin \theta$, joten saadaan Youngin kaksoisrakokokeen **interferenssimaksimien** paikat:

$$y_m \approx R \sin \theta_m \quad \Rightarrow \quad y_m \approx R \frac{m\lambda}{d}$$



Kahden lähteen interferenssin intensiteetti

- ▶ Lähteiden S_1 ja S_2 interferenssin **amplitudi** pisteessä P :

$$E_1 = E \cos(\omega t + \phi/2), \quad E_2 = E \cos(\omega t - \phi/2) \quad \Rightarrow \quad E(t) = E_1 + E_2,$$

missä ϕ = aaltojen vaihe-ero P :ssä

- ▶ Kosinin summakaavan avulla saadaan

$$E(t) = E \left[\cos(\omega t) \cos(\phi/2) - \sin(\omega t) \sin(\phi/2) \right. \\ \left. + \cos(\omega t) \cos(-\phi/2) - \sin(\omega t) \sin(-\phi/2) \right] = 2E \cos(\omega t) \cos(\phi/2)$$

joten kahden lähteen summakentän amplitudi

$$E_p = 2E \cos(\phi/2)$$

- ▶ Intensiteetti $I = S_{\text{av}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 = \frac{4}{2} \epsilon_0 c E^2 \cos^2(\phi/2)$

- ▶ Maksimi, kun $\phi = 0$ on $I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$, ja yleensä

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

Vaihe-eron ja matkaeron yhteys

- ▶ Aaltojen vaihe- ja matkaerolla on yhteys

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$$

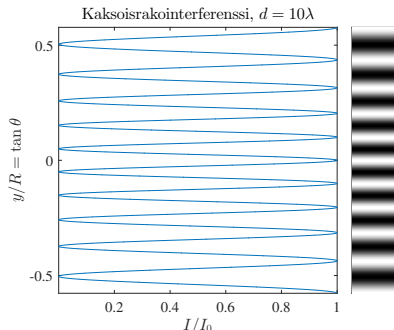
- ▶ Jos $d \ll R$, $r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \Rightarrow \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$

- ▶ Tällöin intensiteetti

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- ▶ Jos vielä varjostin on kaukana raoista, $y \ll R$ ja $\sin \theta \approx y/R$

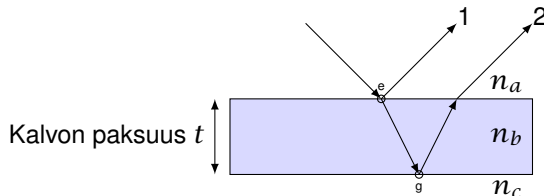
$$\Rightarrow I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi y d}{\lambda R} \right)$$



Interferenssi ohutkalvossa

Heijastuskerroin

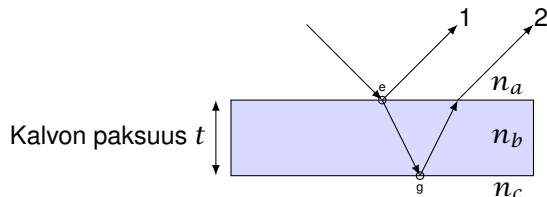
- Tutkitaan heijastusta ja interferenssiä, kun valo osuu ohueen kalvoon (esim. öljyläikkä veden pinnalla tai saippuakupla)



- Fresnelin kertoimet (vrt. luentoviikko 9) kertovat, kuinka suuri osa tulevasta (i) kentästä heijastuu (r) ja läpäisee (t) rajapinnan
- Kohtisuoralle heijastukselle heijastuskerroin $\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$
(n_i on tulopuolen taitekerroin ja n_t läpäisypuolen)

Interferenssi ohutkalvossa

Vaihesiirto



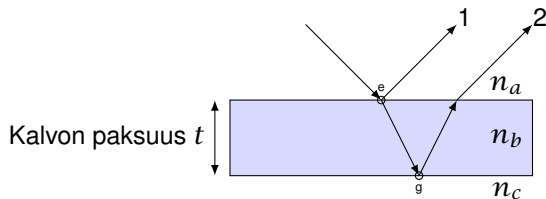
- Heijastuskertoimesta seuraa π :n vaihesiirto heijastuneen ja tulevan säteen välille, jos $n_t > n_i$; esim. säde 1:

$$n_b > n_a \quad \Rightarrow \quad E_r = - \left| \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} \right| E_i \cos(kx - \omega t) = |\Gamma| E_i \cos(kx - \omega t + \pi)$$

(tapahtuuko säteelle 2 pisteessä (g) vaihesiirtoa?)

Interferenssi ohutkalvossa

Matkaero



- ▶ Heijastuksessa pisteessä (e) säteelle 1 syntyy **vaihesiirto** $\phi_1 = \pi$ ja levyn sisällä säteen 2 vaihe muuttuu kulmalla ϕ_2 , joten säteiden 1 ja 2 **vaihe-ero** δ kohtisuorassa heijastuksessa on $\delta = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \pi$, kun λ on **aallonpituus levyssä**
- ▶ Matkaero $r_2 - r_1 \approx 2t \implies \delta = 2t \frac{2\pi}{\lambda} - \pi$
 - ▶ **Huomaa:** Vaihesiirto syntyy siinä heijastuksessa, jossa $n_t > n_i$

Interferenssi ohutkalvossa

Interferenssiehdot

- ▶ Säteiden 1 ja 2 välillä on **vahvistava** interferenssi, kun ($n = n_b$, $n_a = n_c = 1$; λ_0 on aallonpituus ilmassa)

$$\delta = 2\pi m \quad \Rightarrow \quad \delta = 2t \frac{2\pi n}{\lambda_0} - \pi = 2\pi m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4nt}{\lambda_0} - 1 = 2m \quad \Rightarrow \quad 2t = \frac{\lambda_0}{n} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ **Sammuttava** interferenssi, kun $\delta = (2m - 1)\pi$:

$$2t = \frac{m\lambda_0}{n}, \quad m = 1, 2, \dots$$

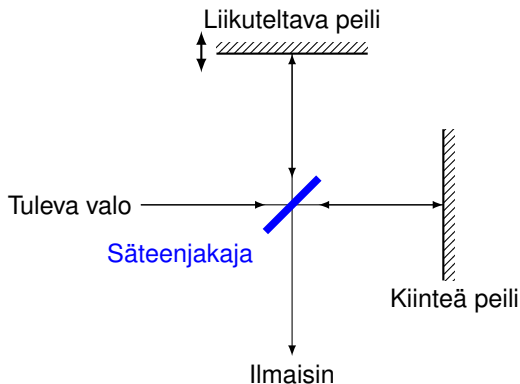
- ▶ Huomaa, että nämä tulokset **pätevät ainoastaan** systeemille, jossa on suhteellinen **puolen aallon vaihesiirto** (esim. ilma–lasi–ilma) – muille tapauksille ne pitää johtaa erikseen
- ▶ Laskuissa on **oltava tarkkana**, syntykö jossain **suhteellinen puolen aallon vaihesiirto**

Michelsonin interferometri

- ▶ Tärkeä interferenssin sovellus
- ▶ Kun peiliä siirretään matka y , ilmaisimen yli pyyhkäisee interferenssijuovamäärä m ja voidaan laskea y tai säteen aallonpituus λ :

$$y = m \frac{\lambda}{2} \text{ tai } \lambda = \frac{2y}{m}$$

- ▶ Interferenssijuovista voidaan myös määrittää esim. tuntemattoman kaasun taitekerroin



Yhteenvedo luvusta 35

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Koherentit lähteet
- ▶ Vahvistava (konstruktiiivinen) ja sammuttava (destruktiivinen) interferenssi
- ▶ Interferenssikuvio ja interferenssijuova
- ▶ Ohutkalvointerferenssi

Kaavoja?

- ▶ Matkaero $m\lambda \Rightarrow$ vahvistava interferenssi
- ▶ Matkaero $(m + 1/2)\lambda \Rightarrow$ sammuttava interferenssi
- ▶ Suhteellinen $\lambda/2$ vaihesiirto heijastuksien takia \Rightarrow matkaero toisin päin

Ole tarkkana millä oletuksilla tämän luvun valmiit kaavat pätevät.

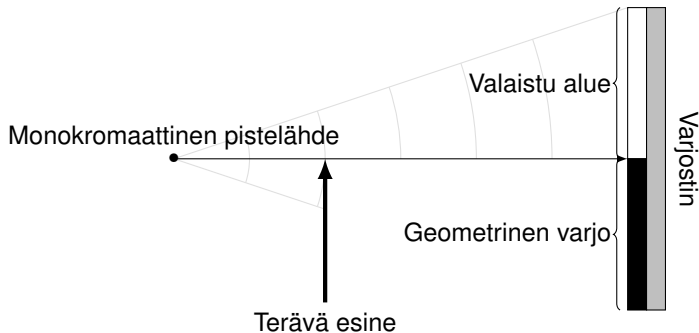
Diffraktio (YF 36)

Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä tapahtuu, kun koherentti valo valaisee kohteen reunaa tai aukkoa
- ▶ ymmärtämään, miten kapean raon läpi kulkeva koherentti valo synnyttää diffraktiokuvion
- ▶ miten intensiteetti yhden raon diffraktiokuvion eri kohdissa määritetään
- ▶ mitä tapahtuu, kun koherentti valo valaisee lähekkäisten kapeiden rakojen rivistöä
- ▶ miten diffraktiohilaa voi käyttää aallonpituuden tarkkuusmittaukseen
- ▶ miten röntgendiffraktio paljastaa kiteiden atomirakenteen
- ▶ miten diffraktio asettaa rajat pienten yksityiskohtien havaitsemiselle teleskoopilla

Geometrisen optiikan rajoitukset

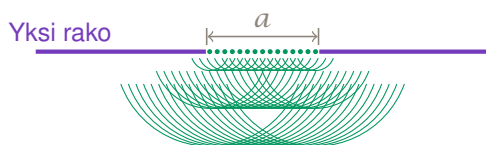
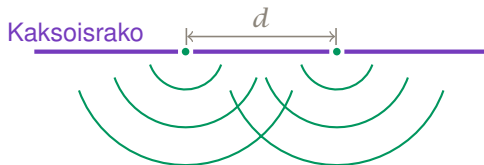
- ▶ Geometrisen optiikan mukaan valonsäde ei taivu kulkiessaan terävän reunan ohi, joten varjon reuna on terävä



- ▶ Todellisuudessa varjon reuna ei ole terävä, vaan valon ja varjon reunassa on **diffraktiokuvio** (miksi – miten selitettävissä?)

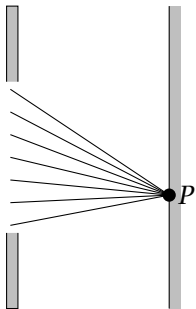
Diffraktio ja Huygensin periaate

- ▶ **Diffraktio** on interferenssi-ilmiö, jota esiintyy reunojen ja aukkojen läheisyydessä
- ▶ Huygensin periaatteen mukaisesti aaltorintaman jokainen piste toimii (toisio)alkeisaaltojen lähteenä (alkeisaallot leviävät joka suuntaan aallon etenemisnopeudella) ja alkeisaaltojen verhopinta myöhempanä ajanhetkenä osoittaa aaltorintaman sijainnin tuolla hetkellä
- ▶ Uuden aallon hetkellinen ”poikkeama” (amplitudi tai kenttävektori) saadaan summaamalla alkeisaaltojen **hetkelliset** poikkeamat kussakin pisteessä (eli aaltoja tarkastellaan vaihe-eroineen)
- ▶ ”Interferenssi” on pienen lähdemäärän (~kahden lähteen) ilmiö, ”diffraktio” on suuren lähdemäärän tai aukkojakautuman ilmiö – kumpikin on seurausta superpositiosta ja Huygensin periaatteesta, joten ilmiöiden **jako** kahteen luokkaan on **osin keinotekoinen**

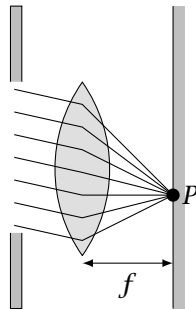


Lähi- ja kaukokenttädiffraktio

Lähikenttädiffraktio
eli **Fresnelin** diffraktio
= lähde, kohde ja varjostin lähellä (raosta lähtevät säteet eivät ole yhdensuuntaisia)



Kaukokenttädiffraktio
eli **Fraunhoferin** diffraktio
= pitkät etäisyydet (raosta lähtevät säteet ovat liki yhdensuuntaisia)



Yksi rako

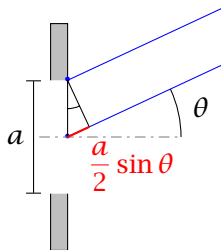
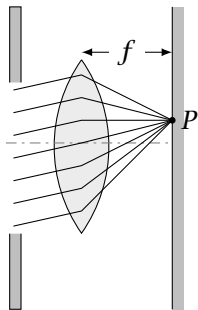
- ▶ Valaistaan pitkää kapeaa rakoja monokromaattisella valolla (**tasoaallolla**) ja tarkastellaan kaukaiselle varjostimelle syntyvää kuviota
- ▶ Geometrisen optiikan **väite**: varjostimella näkyy raon kuva (samanmuotoisena ja -kokoisena)
- ▶ **Todellisuudessa** varjostimella on diffraktiokuva, jossa **tummat** ja valoisat alueet vuorottelevat keskuskuvion laidoilta ulospäin mentäessä (valoisa keskuskuvio **saattaa olla** jopa leveämpi kuin rako)
- ▶ **Huygensin periaatteen** mukaisesti raon jokainen pinta-alkio toimii uuden aallon lähteenä (kapean raon tapauksessa lähteet ovat raon pituussuuntaisia **suikaleita**, jotka tuottavat **synterialkeisaaltoja**)
- ▶ Syntyneet aallot muodostavat uuden aaltorintaman, joka etenee alkuperäisen aallon nopeudella (koska väliaine on sama)
- ▶ Aaltojen intensiteetti varjostimella saadaan summaamalla kaikkien alkeisaaltojen vaikutukset aaltojen vaihe ja amplitudi huomioon ottaen

Tummien juovien suunnat

- ▶ Oletetaan pitkä kapea rako (raon **leveys** olkoon a ; raon pituussuunta on piirroksia vastaan kohtisuorassa ja **pituus** $\gg a$)
- ▶ **Kaukaiselle** varjostimelle osuvat diffraktoituneet säteet ovat lähes **yhdensuuntaisia** (= Fraunhoferin diffraktio)
- ▶ Diffraktiokuvio **tiivistetään** sylinterilinssillä, jonka polttoviivalla varjostin on
- ▶ Raon reunalla ja raon keskellä olevista **lähdesuikaleista** lähteneiden alkeisaaltojen matkaero varjostimella on $\Delta x = (a/2) \sin \theta$
- ▶ Sammuttava interferenssi, kun $\Delta x = \lambda/2$; pätee **kaikille** $a/2$ -etäisyyksisille suikaleille
- ▶ Rako voidaan jakaa neljään, kuuteen jne. suikaleeseen \Rightarrow **sammuttava** interferenssi, kun ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

$$\Delta x = \frac{a}{2m} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$$



Tummien juovien paikat

- ▶ Yleensä $\lambda \ll a$, joten θ on pieni:

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{m\lambda}{a} \quad ([\theta] = \text{rad})$$

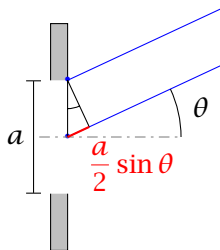
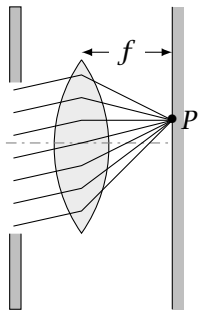
- ▶ Raon ja varjostimen etäisyys olkoon x (jos **ei ole** linssiä; jos **linssi on mukana**, $x = f$ eli linssin ja varjostimen välimatka)
- ▶ Tumman juovan m **paikka** (= juovan etäisyys kuvion keskikohdasta)

$$y_m = x \tan \theta \approx x \theta \quad \Rightarrow \quad y_m = x \frac{m\lambda}{a};$$

pätee, kun $y_m \ll x$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

- ▶ Tyypillisesti $\lambda \sim 500 \text{ nm}$ ja $a \sim 100 \mu\text{m}$
- ▶ Esim. HeNe-laser ($\lambda \approx 633 \text{ nm}$) valaisee kapeaa rakoa. Laske raon leveys, kun $x = 6 \text{ m}$ ja keskimmäisten tummien juovien välimatka on 32 mm :

$$y_1 = \frac{32 \text{ mm}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x\lambda}{y_1} \approx 0.24 \text{ mm}$$



Diffraktio kokonaisamplitudi

- ▶ Diffraktiokuvion intensiteetti lasketaan samalla tavalla kuin aiemmin kahden raon interferenssin intensiteetti
- ▶ Kokonaisamplitudi E_P (pisteessä P) saadaan raon ylä- ja alareunasta lähteneiden aaltojen vaihe-eron β (radiaaneina!) ja kuvion keskikohdan amplitudin E_0 avulla (E_0 on lähdesuikaleiden säteilemien amplitudien summa, kun aaltojen vaihe-ero on merkityksettömän pieni):

$$E_P = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_P^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

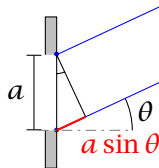
(säteilymaksimi on suunnassa $\beta = 0$ rad)

- ▶ Vaihe-ero β saadaan geometriasta:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{matkaero}$$

- ▶ Piirroksen mukaan matkaero on $a \sin \theta$, joten

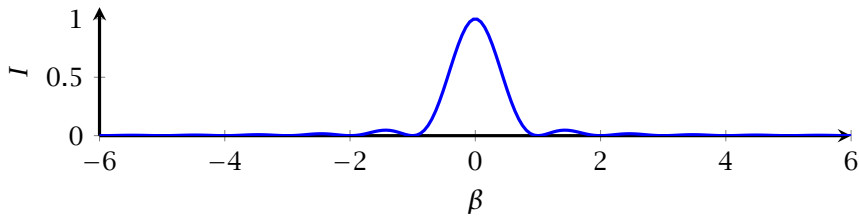
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$



Yhden raon diffraktion intensiteetti

- ▶ Yhden raon kuvion intensiteetti on siten

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$$



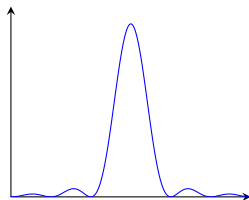
- ▶ Minimikohdat: $I(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 2\pi m \Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$)
- ▶ Maksimien selvittäminen onkin konstikkaampaa...
- ▶ Raon **levantäminen kaventaa** keskusmaksimia!

Kaksi rakoa

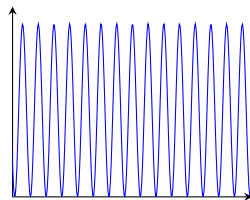
- ▶ Usean raon kuvio koostuu
 - ▶ diffraktiosta (minimit $m_d = \pm 1, \pm 2, \dots$; kunkin raon leveys on a)
 - ▶ interferenssistä (maksimit $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; rakojen on välimatka d)
- ▶ Kokonaisintensiiteetti on interferenssin ja diffraktion intensiteettien tulo

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2,$$

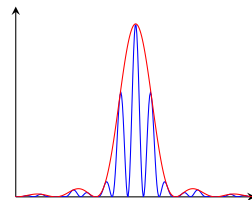
missä $\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$ ja $\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$



Difraktio

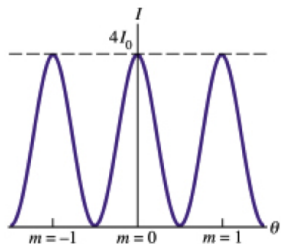
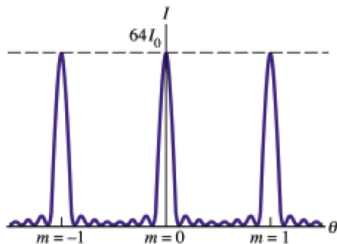
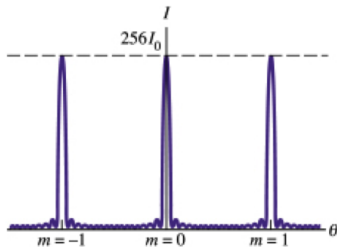


Interferenssi

Yhteisvaikutus ($d = 3a$)

Monta rakoja

- ▶ Kun rakoja on N kpl, diffraktiomaksimien välissä on $(N - 1)$ minimikohtaa; maksimikohtien intensiteetti $I \sim N^2$ ja maksimin leveys $\sim 1/N$
- ▶ Suurten kapeiden maksimikohtien (eli **päämaksimien**) sijainnit voidaan **mitata tarkasti** \Rightarrow **sovellukset**

(a) $N = 2$ (b) $N = 8$ (c) $N = 16$

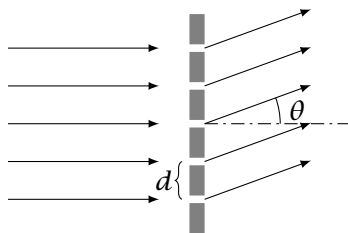
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Diffraktiohila

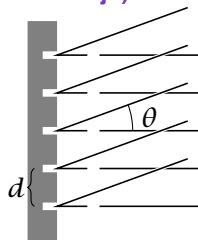
- = Suuri joukko tasavälisiä, yhdensuuntaisia aukkoja tai **uria**
- ▶ Voidaan tehdä esim. raapimalla timanttiterällä uria lasilevyn pintaan
- ▶ Kaksi tyyppiä: läpäisy- ja heijastushila
- ▶ **Intensiteettimaksimien** ehto on sama molemmille tyypeille:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(esim. $m = \pm 1$ -huiput ovat **ensimmäisen kertaluvun viivoja**)



Läpäisyhila



Heijastushila

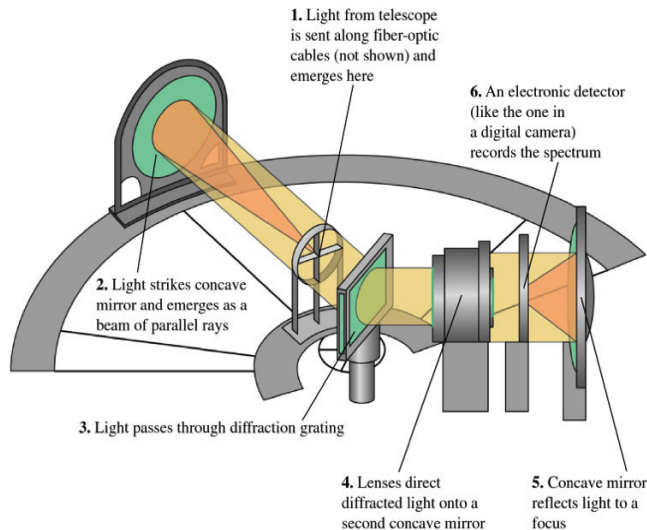
Hilaspektrografi

▶ Diffraktioehto

$$d \sin \theta = m\lambda$$

- ▶ Tutkittavan valon aallonpituus voidaan määrittää mittaamalla θ (= liu'utettavan peilin [2.] asento)
- ▶ Koko spektri saadaan käymällä kaikki kulmat läpi

(Kuva: YF)



Kromaattinen erotuskyky

- ▶ Spektrografin **kromaattinen erotuskyky** määritellään suhteena $R = \lambda / \Delta\lambda$, missä $\Delta\lambda$ on pienin erotettavissa oleva aallonpituusero
- ▶ Suurempi $R \equiv$ parempi laite
- ▶ **Valitaan** erottelukriteeri: erotamme lähekkäisten aallonpituuksien maksimit, kun yhden aallonpituuden **diffraktiomaksimi** osuu toisen aallonpituuden ensimmäiseen **diffraktiiminimiin**
- ▶ Maksimi saadaan, kun vierekkäisten rakojen säteilyn vaihe-ero on $\phi = 2\pi m$
- ▶ Maksimista päästään lähimpään minimiin kasvattamalla vaihe-eroa lisäyksellä $d\phi = 2\pi / N$, missä $N =$ rakojen lukumäärä
- ▶ Vierekkäisten rakojen säteilyn vaihe-ero on myös (**huomaa**: antiikva- d on differentiaalilin symboli, kursiivi- d rakojen välimatka!)

$$\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \quad \stackrel{d}{\Rightarrow} \quad d\phi = \frac{2\pi d \cos \theta}{\lambda} d\theta$$

Spektrografin erotuskyky

- ▶ Saadaan

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos \theta}{\lambda} d\theta = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow d \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{N}$$

(vaihe-eron muutos maksimista minimiin)

- ▶ Toisaalta maksimeille pätee

$$d \sin \theta = m\lambda \xrightarrow{d} d \cos \theta d\theta = m d\lambda \quad (\text{lähekkäisten aallonpituuksien maksimit})$$

- ▶ Yhdistämällä yhtälöt saadaan ($d\lambda \rightarrow \Delta\lambda$)

$$\frac{\lambda}{N} = m\Delta\lambda \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

- ▶ Erotuskyky **paranee**, kun N kasvaa

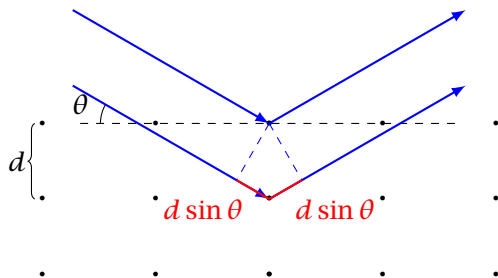
Röntgendiffraktio

- ▶ Röntgensäteiden aallonpituus on kiteen atomien välisen etäisyyden suuruusluokkaa, $\lambda \sim 1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$
- ▶ Röntgensäteillä valaistu kide sirottaa säteitä ja sironneista säteistä syntyy diffraktiokuvio kiteen säännöllisen hilan vuoksi (vaikka suurin osa säteistä kulkee kiteen läpi suoraan)
- ▶ **Röntgendiffraktio** (oikeastaan -interferenssi) on tärkeä menetelmä esim. kiteiden ja proteiinien rakenteen tutkimuksessa
- ▶ Vahvistava interferenssi saadaan, kun vierekkäisistä atomiriveistä sironneiden aaltojen matkaero toteuttaa **Braggin ehdon**

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

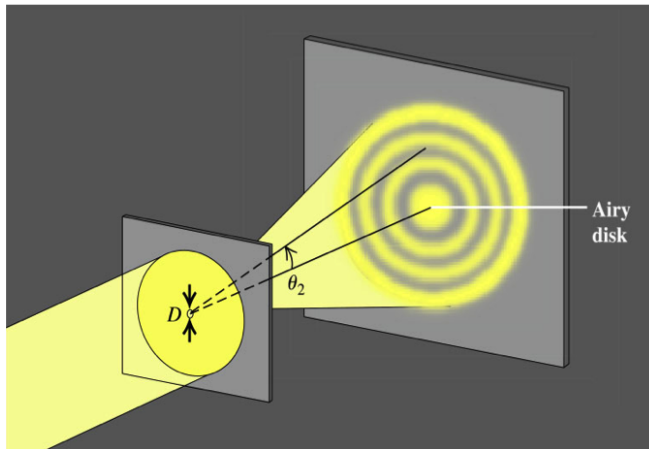
missä θ on **tulevan säteen ja pinnan välinen kulma** ja d on kiteen atomitasojen välinen etäisyys; lisäksi säteiden **tulokulman ja tarkastelukulman** pitää olla yhtä suuri ja $m\lambda < 2d$ (m on jälleen kertaluku)

Braggin ehto



Pyöreän aukon diffraktiokuvio

- ▶ Valo taipuu pyöreässä aukossa kuten kapeassa raossa
- ▶ Pyöreän raon diffraktiokuviossa on valoisa **keskuskieppo** sekä valoisia ja tummia **renkaita**



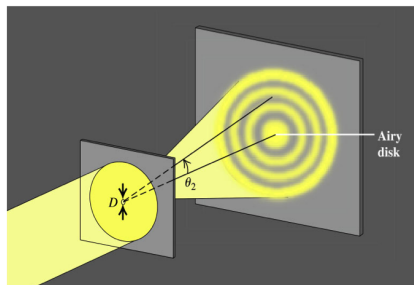
(Kuva: YF)

Airy'n kiekko

- ▶ Valoisa keskuskiekkko on **Airy'n kiekko**
- ▶ Kiekko rajautuu ensimmäiseen tummaan renkaaseen suunnassa θ_1 (aukon halkaisija olkoon D):

$$\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

[Ylikurssia: Kuvion intensiteetti muuttuu säteittäissuunnassa funktion $(J_1(ka \sin \theta)/(ka \sin \theta))^2$ verrannollisena ($a = D/2$); J_1 on ensimmäisen kertaluvun ensimmäisen lajin Besselin funktio ja 1.22 on funktion ensimmäinen nollakohta jaettuna piillä]

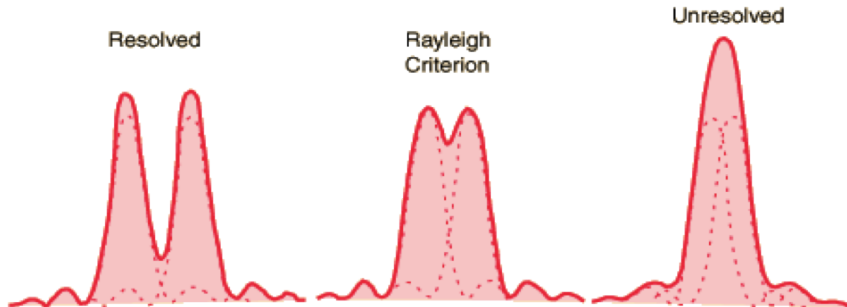


Erotuskyky

- ▶ Diffraaktion takia **piste** kuvautuu optisissa laitteissa **ympyräkiekoksi**
- ▶ Optisen kojeen tuottamien **kuvapisteid** keskinäiset kulmaetäisyydet ovat samat kuin **kohdepisteiden** keskinäiset kulmaetäisyydet
- ▶ Kahden lähekkäisen kohdepisteen kuvat ovat vielä erotettavissa toisistaan, jos yhden pisteen diffraktiokuvan **huippu** on toisen pisteen diffraktiokuvan ensimmäisen **minimin** kohdalla
- = **Rayleigh'n kriteeri** kohteidenerotuskyvyille – kohteet voi erottaa, jos niiden kulmaetäisyydelle θ pätee

$$\sin \theta > 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

- ▶ Järjestelmä on **diffraktiorajoitteinen**, jos **erotuskykyä** rajoittaa diffraktio

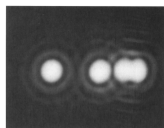


Aukon vaikutus erotuskykyyn

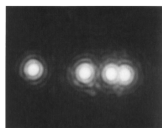
- ▶ Rayleigh'n kriteeristä seuraa optisten järjestelmien (kulma)erotuskyvyn raja:

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

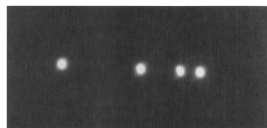
- ▶ Määritelmä on mielivaltainen mutta antaa suuruusluokan
- ▶ Suuren optisen aukon käyttö parantaa erotuskykyä – millä hinnalla?



Pieni aukko



Keskikokoinen aukko



Suuri aukko

(Kuvissa pistelähteet pysyvät paikoillaan ja optisen järjestelmän aukkoa kasvatetaan: erotuskyky paranee)

(Kuvat: YF)

Yhteenveto luvusta 36

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Fresnelin ja Fraunhoferin diffraktio
- ▶ Diffraktiokuvio (erityisesti tummat juovat)
- ▶ Diffraktiohila
- ▶ Hilaspektrografi ja kromaattinen erotuskyky
- ▶ Röntgendiffraktio ja Braggin ehto
- ▶ Airyn kiekko
- ▶ Rayleigh'n kriteeri

Tärkeitä kaavoja

Yhden raon tummat juovat ja intensiteetti

$$\sin \theta = m\lambda/a, \quad I = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$$

Diffraktiohilan intensiteettimaksimit

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Braggin ehto

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

Rayleigh'n kriteeri \Rightarrow

$$\sin \theta > 1.22\lambda/D$$