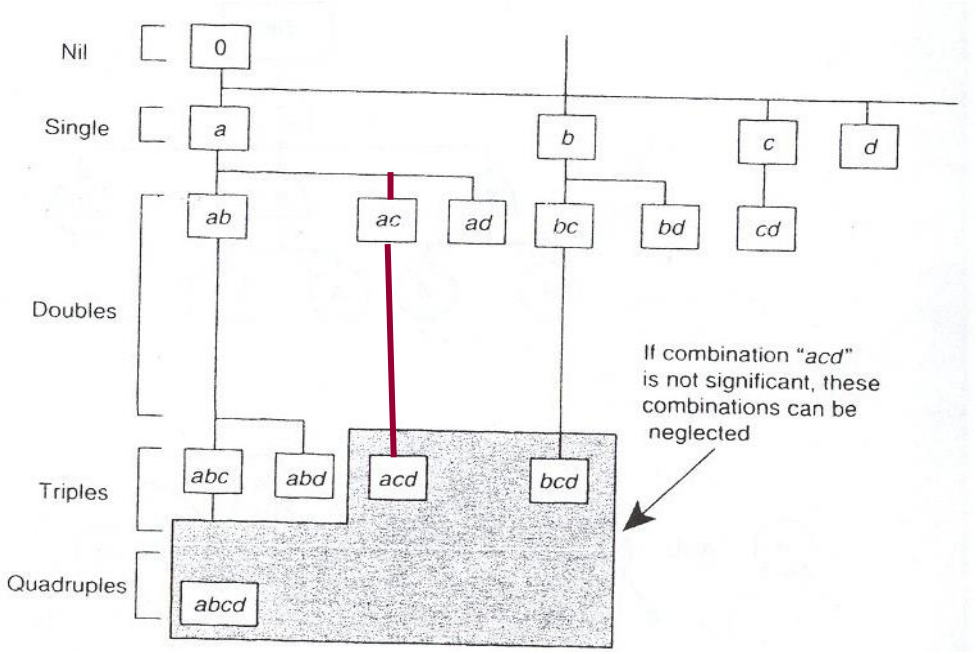
Luento 5
Minimikatkosjoukkojen laskenta yhteisvikojen analyysi, koherentit järjestelmät

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Katkosjoukkojen lukumäärä (1/4)

- Lähtökohtia
  - Isoissa järjestelmissä perustapahtumia voi olla satoja
  - Näistä muodostuvia katkosjoukkoja voi olla miljoonia tai peräti miljardeja ⇨ tuloksena laskennallisia haasteita
  - Päähuomio kohdistuu yleensä tn:ltään suurimpiin katkosjoukkoihin (esim. tn > 10^{-7})
  - Miten tarkasteltavien katkosjoukkojen määrää voidaan rajoittaa siten, että tn:ltään kynnysarvon alittavia katkosjoukkoja ei välttämättä generoida?
- Lähestymistapa
  - Järjestetään perustapahtumat tn:nsä mukaan alenevaan järjestykseen
  - Rakennetaan puu, jossa
    - » kullakin tasolla lisätään yksi vikaantuva perustapahtuma aiempien tasojen tapahtumiin
    - » kullakin rivillä perustapahtumat esitetään em. tn-järjestyksen mukaisesti (so. tn:ltään suurin ensin, sitten toiseksi suurin jne.)

Katkosjoukkojen lukumäärä (2/4)



- Huomioita
  - Olkoon P_i i:nnen perustapahtuman tn
  - Vikajoukko FS (failure set) on joukko toteutuvia perustapahtumia
  - Jos perustapahtumat ovat riippumattomia, niin vikajoukon tn on

$$P(FS) = \prod_{i \in FS} P_i \prod_{i \notin FS} (1 - P_i)$$

Katkosjoukkojen lukumäärä (3/4)

- Tapahtuman lisääminen vikajoukkoon
  - Jos FS' on vikajoukko, joka saadaan lisäämällä vikajoukkoon FS perustapahtuma j, niin

$$P(FS') = \frac{P_j}{1-P_j} \prod_{i \in FS} P_i \prod_{i \notin FS} (1-P_i)$$

$$= P(FS) \times \frac{P_j}{1-P_j}$$

  - Kerrointermi $\frac{P_j}{1-P_j}$ pienempi kuin 1 joss $P_j < 0.5$
  - Ts. jos FS:n tn on alle kynnysarvon, sama pätee tn-ehdon mukaisesti laajennetulle vikajoukolle
    ⇨ vikajoukkojen määrää voidaan rajata

Katkosjoukkojen lukumäärä (4/4)

- Tapahtuman vaihtaminen toiseksi
  - Jos FS" saadaan vaihtamalla vikajoukossa FS perustapahtuma j tapahtumaksi k, niin

$$P(FS") = P_k(1-P_j)\prod_{i\in FS\cap FS"} P_i \prod_{i\notin FS\cap FS"} (1-P_i)$$

$$= \frac{1-P_j}{P_j} \times \frac{P_k}{1-P_k} \times P(FS)$$

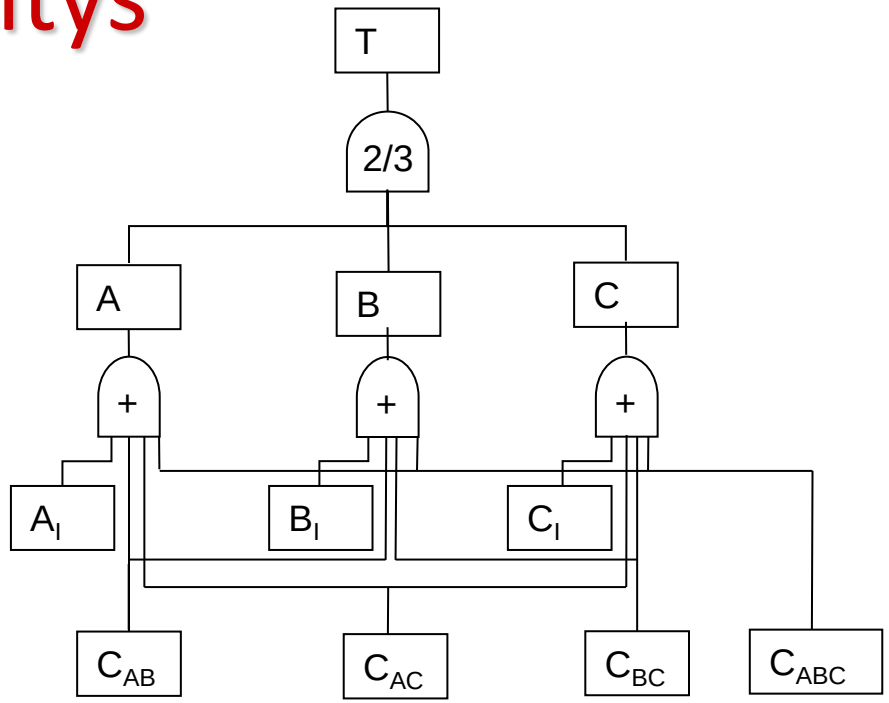
Huom! Modarres (3.4) väärin!

  - Kerrointermi pienempi kuin 1 joss $P_k < P_j$
  - Ts. jos FS:n tn on alle kynnysarvon, sama pätee näin tehdyn vaihdon kautta saadulle vikajoukolle
    ⇨ vikajoukkojen määrää voidaan rajata

Toisistaan riippuvat vikaantumiset

- Riippuvuuksien huomiointi
  - Perustapahtumien taustalla voi olla yhteisiä syitä
  - Nämä on pyrittävä huomioimaan – muutoin saadut riskiarviot ovat alakanttiin, koska yhteisten syiden vaikutukset eivät näy tuloksissa
  - Edellyttää tilastojen rakentamista ja käyttöä siten, että yhteiset vikaantumissyyt tunnistetaan
    - » Tämä voi olla käytännössä haasteellista
- Esimerkki
  - Järjestelmässä kolme komponenttia A,B ja C
  - Järjestelmä toimii, jos komponenteista vähintään kaksi toimii (so. 2/3-portti)
  - Komponentit voivat vikaantua toisistaan riippumatta
  - Lisäksi komponentit A, B ja C voivat vikaantua yhteisistä syistä joko pareittain tai kaikki kolme
  - Merkitään tapahtumia
    - » A = komponentti vikaantuu (vast. B,C)
    - » A_I = A vikaantuu mistään muista syistä riippumatta (vast. B_I, C_I)
    - » C_{AB} = komponentit A ja B vikaantuvat yhteisestä syystä, joka ei vikaannuta C:tä (vast. C_{AC}, C_{BC})
    - » C_{ABC} = kaikki kolme komponenttia vikaantuvat yhteisestä syystä

Vikapuuesitys



- A-komponentin vikaantuminen

$$A = A_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{ABC}$$

- Vikaantumissyyt toisensa poissulkevia ⇨

$$A_I \cdot C_{AB} = A_I \cdot C_{AC} = A_I \cdot C_{ABC} = \emptyset$$
$$C_{AB} \cdot C_{AC} = C_{AB} \cdot C_{ABC} = \emptyset$$

Vikaantumisen minimikatkosjoukot

- Vikaantuminen tapahtuu, kun

$$T = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

- Edellisen kalvon tulosten perusteella

$$A \cdot B = (A_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{ABC}) \cdot (B_I + C_{AB} + C_{BC} + C_{ABC})$$
$$= A_I \cdot B_I + C_{AB} + C_{ABC}$$

(muiden parien leikkaukset tyhjiä)

- Minimikatkosjoukoiksi saadaan siis

$$T = A_I \cdot B_I + A_I \cdot C_I + B_I \cdot C_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{BC} + C_{ABC}$$

- Saadaan siis

$$P(T) \approx P(A_I) \cdot P(B_I) + P(A_I) \cdot P(C_I) + P(B_I) \cdot P(C_I) + P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{BC}) + P(C_{ABC})$$

  - (riippumattomille tapahtumille $P(A_I \cdot B_I) = P(A_I) \cdot P(B_I)$, leikkauksen $A_I \cdot B_I \cdot C_I$ tn paljon pienempi kuin parien

Vikaantumistodennäköisyys

- Oletetaan, että
  - Kukin komponenteista vikaantuu muista syystä riippumatta samalla todennäköisyydellä Q_1
  - Pareittaiset samasta syystä aiheutuvat vikaantumiset tapahtuvat kukin tn:llä Q_2
  - Kaikki kolme vikaantuvat yhteisestä syystä tn:llä Q_3
  - Tällöin järjestelmä vikaantuu siis tn:llä

$$P(T) \approx 3(Q_1)^2 + 3Q_2 + Q_3$$

- Jos esimerkiksi $Q_1 = 0.05, Q_2 = 0.02, Q_3 = 0.01$, niin

$$P(T) \approx 3 \times 0.05^2 + 3 \times 0.02 + 0.01 = 0.0075 + 0.06 + 0.01 = 0.0775$$

- Yhteisten riskitekijöiden osuus kokonaisriskistä siis

$$\frac{0.06 + 0.01}{0.0775} = 90.3\%$$

  - Riippumattomien vikojen vaikutus on siis verraten vähäinen, koska näiden lausekkeissa tulotermejä

Riippuvuudet ja ehdolliset tn:t

- Lähtökohtia
  - Viime luennolla perustapahtumat oletettiin riippumattomiksi (ks. pumppujärjestelmä)
  - Jos perustapahtumilla yhteisiä vikaantumissyitä, niin yhden perustapahtuman tn kasvaa, jos toisen perustapahtuman tiedetään tapahtuneen
  - Esim. jos perustapahtumia (A_I, B_I) on kaksi kuten edellä siten, että nämä voivat toteutua joko riippumatta(A_I, B_I) tai yhteisestä syystä C_{AB}, niin

$$P(A \cdot B|B) = \frac{P(A_I)P(B_I) + P(C_{AB})}{P(B_I) + P(C_{AB})}$$

  - Merkitään

$$p_{AB} = P(A_I)P(B_I)$$
$$p_A = P(A_I)$$
$$x = P(C_{AB})$$
$$f(x) = \frac{p_{AB} + x}{p_B + x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{p_B + x} - \frac{p_{AB} + x}{(p_B + x)^2} = \frac{p_B - p_{AB}}{(p_B + x)^2} > 0$$

  - Minimi saavutetaan kohdassa $x = P(C_{AB}) = 0$, mikä vastaa riippumattomuutta

β-faktorimalli

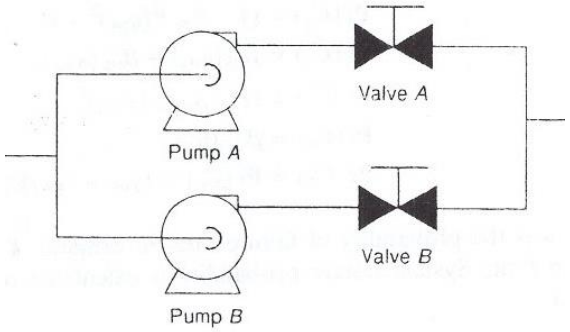
- Lähtökohtia
  - Järjestelmän komponentit tuplataan m-kertaiseksi
  - Yhteisen (common) vikaantumissyyn tapahtuessa kaikki komponentit vikaantuvat
  - β-parametri ilmaisee, miten suuressa osassa vikaantuminen aiheutuu yhteisestä syystä, ts.

$$\beta = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_I}$$

    missä λ_c on yhteisen syyn aiheuttama vikaantumistaajuus ja λ_I on riippumaton vikaantumistaajuus
    - » Vastaavasti myös vikatodennäköisyyden kanssa
  - Jos Q_t on järjestelmän kokonaisvikaantumistn, niin järjestelmä vikaantuu
    - » riippumattomien komponenttivikaantumisten tuloksena tn:llä $Q_1 = (1-\beta)Qt$
    - » yhteisestä syystä kaikkien komponenttien vikaantuessa tn:llä $Q_m = \beta Q_t$
    - » Tarkalleen k komponenttia ($1 < k < m$) ei voi vikaantua yhteisestä syystä, koska yhteinen syy vikaannuttaa kaikki komponentit
  - ⇨ k valittua komponenttia ($1 < k < m$) vikaantuu todennäköisyydellä $Q_k = 0, k = 2, \dots, \ m-1$

Esimerkki

- Jäähdytysjärjestelmä
  - Jäähdytys edellyttää sekä pumpun että venttiilin toimivan
  - Pumppu- ja venttiiliosasysteemikokonaisuudet tuplataan luotettavuuden parantamiseksi
  - Pumppu saattaa olla käynnistymättä (PS, pump failure to start) tai käydä liian vähän aikaa (PR, pump failure to run)
  - Venttiili saattaa olla avaumatta (VO, valve failure to open)

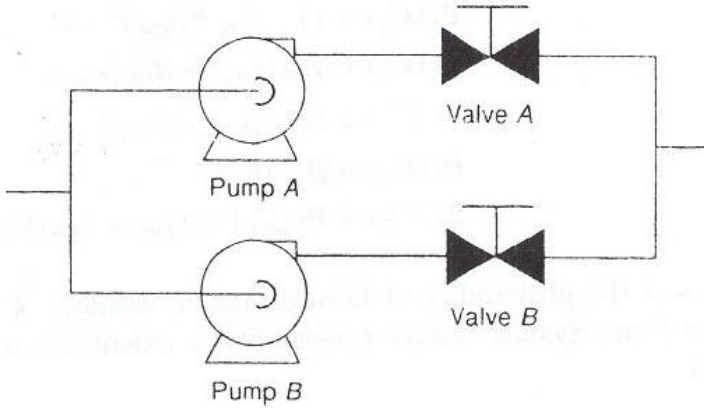


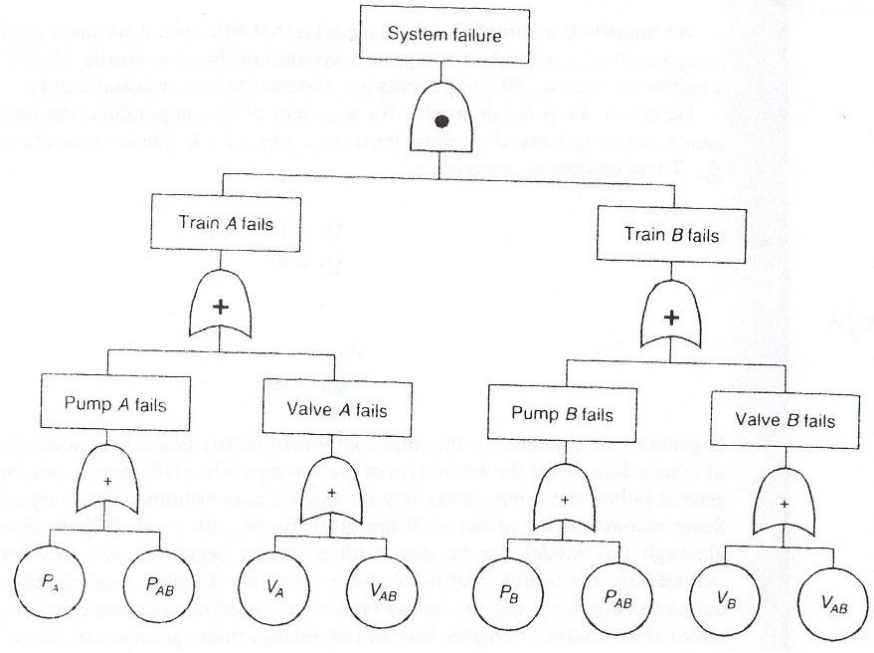
  - Käynnissä olevan pumpun vikaantumistaajuus λ_{PR}
  - Jos pumppu käy ajan T, niin se vikaantuu tänä aikana todennäköisyydellä

$$q_{PR} = \int_0^T \lambda_{PR} e^{-\lambda_{PR} t} dt = 1 - e^{-\lambda_{PR} T} \approx \lambda_{PR} T$$

Jäähdytysjärjestelmän vikapuu

- Rakennetaan vikapuu





- Minimikatkosjoukoiksi saadaan

$$C_1 = P_A \cdot P_B, C_2 = P_{AB}, C_3 = V_A \cdot V_B$$
$$C_4 = V_{AB}, C_5 = P_A \cdot V_B, C_6 = P_B \cdot V_A$$

Vikaantumistn:n laskenta (1/3)

- Arvioidaan yhteisistä syistä aiheutuvat vikaantumistaajuudet β-faktorimallilla
  - β_{PS} = miten suuressa osassa tapauksista pumppu jää käynnistymättä yhteisestä syystä
  - β_{PR} = miten suuressa osassa pumppu ei käy tavoiteaikaa T yhteisestä syystä
  - β_{VO} = miten suuressa osassa venttiili ei avaudu yhteisestä syystä
- Minimikatkosjoukkojen tn:t

$$P(P_A \cdot P_B) = [(1-\beta_{PS})q_{PS} + (1-\beta_{PR})q_{PR}]^2$$

$$P(P_{AB}) = \beta_{PS}q_{PS} + \beta_{PR}q_{PR}$$

$$P(V_A \cdot V_B) = [(1-\beta_{VO})q_{VO}]^2$$

$$P(V_{AB}) = \beta_{VO}q_{VO}$$

$$P(P_A \cdot V_B) = P(P_B \cdot V_A)[(1-\beta_{VO})q_{VO}] \times [(1-\beta_{PS})q_{PS} + (1-\beta_{PR})q_{PR}]$$

Vikaantumistn:n laskenta (2/3)

- Järjestelmän (System) vikaantumistn:n approksimoida ylhäältä summalla

$$P(S) \approx \sum_{i=1}^{6} P(C_i)$$

  - Huom! osa katkosjoukoista (esim. $P_A \cdot P_B, V_{AB}$) osin päällekkäisiä, kyse siis approksimaatiosta ylhäältä
- Tarkastellaan parametrien arvoja
  - $q_{PS} = 0.02, q_{VO} = 0.01$
  - $\lambda_{PR} = 0.05/\text{h}, T = 1\ \text{h} \Rightarrow q_{PR} = 1 - \exp(-0.05) = 0.0487$
  - $\beta_{PS} = \beta_{PR} = \beta_{VO} = 0.1$
- Katkosjoukkojen todennäköisyydet
  - $P(P_A \cdot P_B) = [0.9 \times 0.02 + 0.9 \times 0.0487]^2 = 0.003831$
  - $P(P_{AB}) = 0.1 \times 0.02 + 0.1 \times 0.0487 = 0.006877$
  - $P(V_A \cdot V_B) = [0.9 \times 0.01]^2 = 0.000081$
  - $P(V_{AB}) = 0.1 \times 0.01 = 0.001$
  - $P(P_A \cdot V_B) = P(P_B \cdot V_A) = [0.99 \times 0.01] \times [0.9 \times 0.02 + 0.9 \times 0.0487] = 0.000613$

Vikaantumistn:n laskenta (3/3)

- Vikaantumistodennäköisyys siis

$$P(S) \approx \sum_{i=1}^{6} P(C_i) = 0{,}013014$$

- Yhteisten syiden (P_{AB}, V_{AB}) osuus kokonaisriskistä

$$\frac{P(P_{AB})}{P(S)} = \frac{0.006877}{0.013014} = 52.8\%$$

$$\frac{P(V_{AB})}{P(S)} = \frac{0.001}{0.013014} = 7.7\%$$

  - Yhteisten syiden merkitys siis iso, vaikka β-parametrit verraten pieniä tasolla 0.1
- Huomioita
  - Yhden pumppu-venttiililinjan luotettavuus

$$P(S_1) = q_{PS} + q_{PR} + q_{VO} = 0.0787$$

  - Jos voitaisiin tuplata ilman yhteisiä vikaantumisia (so. β-parametrit nollia), niin vikaantumistn olisi

$$P(S_1)^2 \approx 0.006194$$

  - Ts. yhteiset vikasyyt alentavat luotettavuutta paljon!

Huom! Tässä esimerkissä laskettiin tulokset monen desimaalin tarkkuudella, mutta käytännössä parin desimaalin tarkkuus riittävä

Yhteisvikaantumisen estimointi

- β-faktorimallin kritiikki
  - Oletus siitä, että yhteinen vika aiheuttaa aina kaikkien komponenttien vikaantumisen on kovin vahva
    - » Esim. kolmen komponentin 2/N-järjestelmässä (ks. luennon alku) yhteiset syyt voisivat vikaannuttaa joko kaksi (esim. C_{AB}) tai kolme komponenttia (C_{ABC})
  - Yhteistodennäköisyydet estimoitavissa eri tavoin
    - » β-faktorimallissa kysytään, miten suurella tn:llä joku muu komponentti myös vikaantunut yhteisestä syystä, jos yhden komponentin tiedetään vikaantuneen
    - » Jos komponentteja kaksi (A ja B) s.e. yhteisen vikaantuminen on tapahtuma C_{AB}, niin

$$\beta = \frac{P(C_{AB})}{P(B_1) + P(C_{AB})}$$

- Multiple Greek Letter (MGL)-malli
  - Yleistää β-faktorimallin siten, että yhteinen syy ei vikaannuta välttämättä kaikkia komponentteja
  - Kysymykset
    - » β- faktori: millä tn:llä ainakin yksi toinen komponentti vikaantuu yhteisestä syystä, jos ko. komponentti vikaantunut?
    - » γ-faktori: millä tn:llä ainakin kaksi muuta komponenttia vikaantuu yhteisestä syystä, jos ko. komponentti on vikaantunut yhteisestä syystä vähintään yhden toisen komponentin kanssa?

MGL-mallin estimointi (1/2)

- Alun esimerkin β- ja γ-parametrit

$$\beta = \frac{P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}{P(A_1) + P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}$$

$$\gamma = \frac{P(C_{ABC})}{P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}$$

  - Komponenttien riippumattomat (Q_1) ja pareittaiset (Q_2) vikaantumistn:t oletettiin samoiksi ⇨

$$\beta = \frac{2Q_2 + Q_3}{Q_1 + 2Q_2 + Q_3} = \frac{2 \times 0.02 + 0.01}{0.05 + 2 \times 0.02 + 0.01} = 33\%$$

$$\gamma = \frac{Q_3}{2Q_2 + Q_3} = 20\%$$

  - Tarkasteluissa ei kuitenkaan edetä näin päin, vaan niissä β- ja γ- parametreista johdetaan pareittaisten, kolmittaisten jne. yhteisten syiden aiheuttamien vikaantumisten Q_2, Q_3, Q_4, … tn:t
  - m:n komponentin järjestelmässä yhden komponentin kokonaisvikaantumistn Q_t (total) muodostuu siitä, että komponentti vikaantuu joko riippumatta tai kahden, kolmen jne. komponentin vikaantumisen aiheuttamasta yhteisestä syystä
  - Yhdelle komponentille saadaan siis summa

$$Q_t = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} Q_k$$

MGL-mallin estimointi (2/2)

- Saadaan Q_k-parametrien yhtälöt

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{2Q_2 + Q_3}{Q_1 + 2Q_2 + Q_3} \\ \gamma = \dfrac{Q_3}{2Q_2 + Q_3} \\ Q_t = Q_1 + 2Q_2 + Q_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = (1-\beta)Q_t \\ Q_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma)\beta Q_t \\ Q_3 = \gamma\beta Q_t \end{cases}$$

  - Ts. Q_k-parametrit esitettävissä β- ja γ-parametrien algebrallisina lausekkeina
  - Parametrit estimoidaan tarkastelemalla, miten usein useammat komponentin vikaantuvat yhteissyistä
    - » Esim. γ-parametri saadaan jakamalla vähintään kolmen komponentin yhteisvikaantumisten lkm vähintään kahden komponentin yhteisvikaantumisten lkm:llä

- Yleinen tapaus
  - Merkitään $\rho_1 = 1, \rho_2 = \beta, \rho_3 = \gamma, \ldots, \rho_m + 1 = 0$
  - Tällöin pätee

$$Q_k = \binom{m-1}{k-1}^{-1} (1 - \rho_{k+1}) \left(\prod_{i=1}^{k} \rho_i \right) Q_t$$

Huom!
Modarres
s. 78 virhe

Luotettavuus - määritelmä

- Tarkasteltavan yksikön luotettavuus
  - On se todennäköisyys, että yksikkö suorittaa tarkoitetulla tavalla sille kuuluvat tehtävät tarkasteltavana ajanjaksona täsmennettyjen ympäristöolosuhteiden vallitessa
- Huomioita
  - Tarkasteltava yksikkö riippuu tilanteesta
    - » Toisinaan kyse komponentista, toisinaan koko järjestelmästä – vrt. vikapuut ja tapahtumapuut
  - Tarkoitettu suorittaminen kuvattava yksiselitteisesti
    - » Tarpeen esimerkiksi vahingonkorvausvaatimusten ja viranomaisvaatimusten tulkitsemiseksi ⇨ sopimus-juridiikka ja säädökset (direktiivit jne.)
    - » Toleranssirajat yleisiä – esim. vaa'an tarkkuuden oltava 0 ± 0.001 kg
  - Tarkoitettu yksikkö ja tehtävä kuvattava myös
    - » Esim. auton hands freen hajoaminen ei estä kuljetus-tehtävän suorittamista, mutta työpuhelut jäävät soittamatta
  - Ajanjakson ohella voidaan käyttää muitakin suureita
    - » Esim. ajokilometrit, virtakytkimen kytkemiskerrat
  - Olosuhteet rajattava myös
    - » Esim. vuoristorajoitukset autonvuokraajalle Islannissa
  - Laatu vs. luotettavuus
    - » Laatu staattinen käsite – viittaa ominaisuuksiin jonakin hetkenä, luotettavuus huomioi ajan ja olosuhteet
    - » Luotettavuus implikoi laadun, ei välttämättä toisin päin

Koherentit järjestelmät (1/4)

- Komponentin $x_i, i = 1, \ldots, n$ tila

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{jos komponentti ei toimi} \\ 1, \text{jos komponentti toimii} \end{cases}$$

  - n:stä komponentista koostuvan järjestelmän tilavektori on $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- Järjestelmän rakennefunktio

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, \text{jos järjestelmä ei toimi tilavektorilla } \boldsymbol{x} \\ 1, \text{jos järjestelmä toimii tilavektorilla } \boldsymbol{x} \end{cases}$$

  - Huom! sama muuttujien loogisten arvojen tulkinta kuin logiikkakaavioissa, sen sijaan vikapuissa 1 tarkoitti vian esiintymistä!

Koherentit järjestelmät (2/4)

- Sarjajärjestelmä – komponentit peräkkäin
  - Kaikkien toimittava, jotta ”virta menisi läpi”

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, \dots, x_n\} = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- Rinnakkaisjärjestelmä – komponentit rinnan
  - Yhdenkin toimiminen riittää

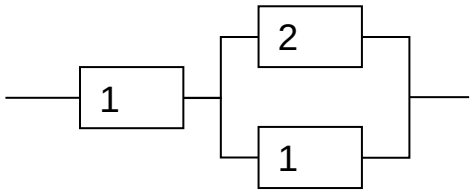
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max\{x_1, \dots, x_n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

- k/n-järjestelmä

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \\ 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \end{cases}$$

Koherentit järjestelmät (3/4)

- Komponentti on irrelevantti, jos sillä ei ole vaikutusta rakennefunktioon
  - Esim. komponentti 2 on alla olevassa järjestelmässä irrelevantti



$$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1[1 - (1 - x_1)(1 - x_2)]$$

Koherentit järjestelmät (4/4)

- Järjestelmä on koherentti joss siinä ei ole irrelevantteja komponentteja ja

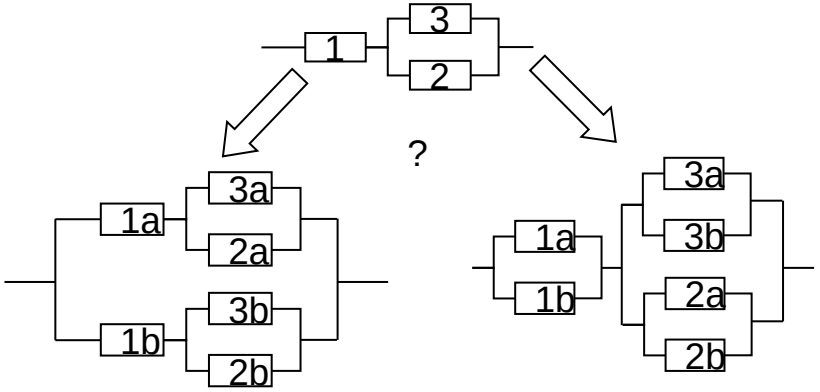
$$\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

  - Ts. rakennefunktio on jokaisen komponentin osalta ei-vähenevä
  - Yksittäisen komponentin muuttaminen viallisesta toimivaksi voi tehdä järjestelmän toimivaksi, mutta ei toisin päin
  - Yleensä pyritään rakentamaan koherentteja järjestelmiä, koska näissä komponentteja voidaan korjata ilman, että tämä voi aiheuttaa vikoja
  - Kaikki järjestelmät eivät ole koherentteja: esimerkiksi yksikomponenttinen rakennefunktio on ei-koherentti

$$\phi(x_1) = 1 - x_1$$

Komponenttien kahdentaminen (1/4)

- Luotettavuutta voidaan parantaa kahdentamalla joko koko järjestelmä tai sen osat – mutta kumpi on parempi?



Komponenttien kahdentaminen (2/4)

- Lause. Jos järjestelmä on koherentti ja $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat tilavektoreita, niin

$$\phi\big(1-(1-x_1)(1-y_1),\dots,1-(1-x_n)(1-y_n)\big) \geq 1-[1-\phi(\boldsymbol{x})][1-\phi(\boldsymbol{y})].$$

Epäyhtälö pätee yhtäsuuruutena, kun

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

  - Ts. kannattaa kahdentaa komponentteja, ei järjestelmiä!

Komponenttien kahdentaminen (3/4)

- Todistus

  Kaikille $i = 1, \ldots, n$ pätee

  $$1 - (1 - x_i)(1 - y_i) \geq x_i$$

  Järjestelmä on koherentti, joten rakennefunktio on argumenttiensa suhteen ei-vähenevä ja

  $$\phi\big(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \ldots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)\big) \geq \phi(\boldsymbol{x})$$

  Vastaavasti pätee

  $$\phi\big(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \ldots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)\big) \geq \phi(\boldsymbol{y})$$

  Saadaan siis

  $$\phi\big(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \ldots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)\big)$$
  $$\geq \max\{\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\} = 1 - [1 - \phi(\boldsymbol{x})][1 - \phi(\boldsymbol{y})]$$

Komponenttien kahdentaminen (4/4)

Rakennefunktiolle pätee

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

Toisaalta

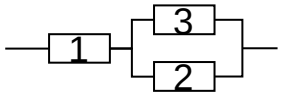
$$\phi\big(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)\big)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)(1 - y_i)$$

Tämä vastaa rinnakkaisjärjestelmää, jossa kahdentamistavalla ei siis väliä

$$1 - [1 - \phi(\boldsymbol{x})][1 - \phi(\boldsymbol{y})] = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)(1 - y_i)$$

Rakenteellinen tärkeys (1/3)

- Komponentin merkitys luotettavuuden kannalta riippuu sen sijainnista
  - Esim. järjestelmässä komponentti 1 näyttää tärkeämmältä, koska sen hajoaminen väistämättä vikaannuttaa koko järjestelmän; näin ei ole komponenttien 2 ja 3 osalta



  - Komponentti 1 on toimivana kolmessa tilavektorissa (1,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)
  - Järjestelmä toimii näistä kolmessa
  - Jos $\boldsymbol{x}$ tilavektori, niin $(1_i, x_{-i})$ on tilavektori, jossa komponentti i on toimii ja muut komponentit saavat samat arvot kuin mitä niillä on tilavektorissa $\boldsymbol{x}$
  - Vastaavasti $(0_i, x_{-i})$ on tilavektori, jossa komponentti i ei toimi, mutta muut saavat tilavektorin $\boldsymbol{x}$ mukaiset arvot

Rakenteellinen tärkeys (2/3)

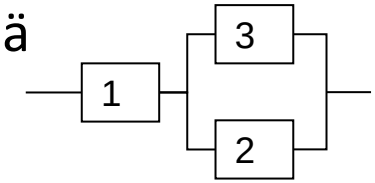
- Määritelmä. Komponentin i rakenteellinen tärkeys koherentissa järjestelmässä on

$$I_\phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x|x_i=1\}} [\phi(1_i, x_{-i}) - \phi(0_i, x_{-i})]$$

  - Tämä on suhteellinen osuus niistä muiden komponenttien tiloista, joissa komponentin vikaantuminen vikaannuttaa koko järjestelmän
  - Myös todennäköisyys, jos muut komponentit vikaantuvat riippumattomasti yhtä isolla tn:llä

Rakenteellinen tärkeys (3/3)

- Esimerkkijärjestelmä



  - Komponentti 1 toimivana mukana tilavektoreissa (1,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)
    Järjestelmä toimii näistä kolmessa ensimmäisessä
  - Komponentin 1 vikaantuminen johtaa tilavektoreihin
    (0,1,1), (0,0,1), (0,1,0), (0,0,0)
    Järjestelmä ei toimi näistä missään

$$I_\phi(1) = \frac{1}{2^{3-1}}(1+1+1+0) = \frac{3}{4}$$

  - Vastaavasti komponentille 3 saadaan tilavektorit
    (1,1,1),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1) (kaksi toimii)
    (1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0) (yksi toimii)

$$I_\phi(1) = \frac{1}{2^{3-1}}(0+1+0+0) = \frac{1}{4}$$

  - Symmetriasyistä komponentin 2 rakenteellinen tärkeys sama kuin komponentin 3

Rakennefunktio ja toimintapolut (1/2)

- Olkoot $P_1, \ldots, P_s$ koherentin järjestelmän minimitoimintapolut ja

$$\alpha_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos kaikki } P_j\text{:n komponentit toimivat} \\ 0, \text{jos jokin } P_j\text{:n komponentti ei toimi} \end{cases}$$

Pätee

$$\alpha_j(\boldsymbol{x}) = \min_{i \in P_j} x_i = \prod_{i \in P_j} x_i$$

Järjestelmä toimii, jos jonkin toimintapolun komponentit toimivat

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos } \alpha_j(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ jollekin toimintapolulle} \\ 0, \text{jos } \alpha_j(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ kaikille toimintapoluille} \end{cases}$$

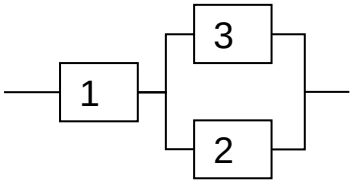
Rakennefunktio ja toimintapolut (2/2)

- Saadaan siis

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_j \alpha_j(\boldsymbol{x}) = \max_j \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right)$$

  - Rakennefunktio on siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimitoimintapolkujen rinnakkaisjärjestelmänä

- Esimerkki
  - minimitoimintapolut (1,1,0), (1,0,1)



$$\phi(\boldsymbol{x}) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (1/2)

- Olkoot $C_1, \ldots, C_k$ koherentin järjestelmän minimikatkosjoukot ja

$$\beta_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos ainakin yksi komponentti } C_j\text{:ssä toimii} \\ 0, \text{jos mikään komponentti } C_j\text{:ssä ei toimi} \end{cases}$$

- Pätee

$$\beta_j(\boldsymbol{x}) = \max_{i \in C_j} x_i = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)$$

- Järjestelmä ei toimi, jos jonkin minimikatkosjoukon kaikki komponentit pettävät

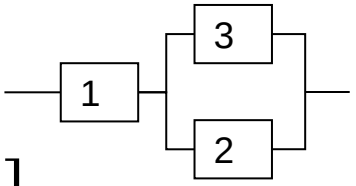
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos } \beta_j(\boldsymbol{x})\text{=1 kaikille katkosjoukoille} \\ 0, \text{jos } \beta_j(\boldsymbol{x})\text{=0 jollekin katkosjoukoille} \end{cases}$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (2/2)

- Tällöin

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \min_j \beta_j(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{k} \beta_j(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i) \right)$$

- Rakennefunktio siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimikatkosjoukkojen sarjajärjestelmänä
- Esimerkki
  - minimikatkosjoukot (1,0,0,), (0,1,1)



$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) &= [1 - (1 - x_1)][1 - (1 - x_2)(1 - x_3)] \\ &= x_1[x_2 + x_3 - x_2 x_3] \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$