

Luento 6

Luotettavuus, koherentit järjestelmät (osa 2)

Vikaantumisprosessit ja käytettävyys

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Yhteisviat

- Tähän osioon on lisätty muutama kalvo yhteisvioista, koska edellisessä osiossa (Luento 5) ei esitelty kuin beettafaktorimalli ja MGL-malli
- Riskianalyysikurssin kannalta beettafaktorimalli kuuluu osattaviin asioihin. Muut mallit esitetään tiedoksi asiasta kiinnostuneille

Yhteisvika

- Komponenttiryhmä $A_1, \dots, A_n$
- Jos komponentit ovat identtisiä
 $P(\text{"komponentti } A_1 \text{ epäkäytettävä}) = P(A_1) = \dots = P(A_n)$
- Jos perustapahtumat ovat riippumattomia, erilaisten vikakombinaatioiden todennäköisyydet voidaan laskea "normaalisti" kuten esim. vikapuulaskennassa tehdään, esim
 $P(A_1 \text{ ja } A_2) = P(A_1)P(A_2)$
- Yhteisvikatarkasteluissa oletetaan riippuvuus ja vieläpä siten, että yhteisvian todennäköisyys on korkeampi kuin yksittäisvikojen tulo, esim.
 $P(A_1 \text{ ja } A_2) > P(A_1)P(A_2)$

Yhteisvikamalleista

- Lasketaan parametrisen mallin avulla eri yhteisvikakombinaatioiden todennäköisyys
- Käytännöllistä kun kombinaatioiden koko kasvaa ($n > 2$)
- Käytännöllistä koska samoja parametreja voidaan soveltaa eri tapauksissa
 - yksittäisvian todennäköisyys tapauskohtaisesti
 - yhteisvikaparametrit arvioidaan geneerisesti - ainakin geneerisemmin kuin yksittäisviat, koska data on niukkaa
- Kaksi lähestymistapaa mallintamiseen
 - Syytekijämalli
 - Vikakombinaatioiden mallintaminen

Syytekijämalli

- Komponentin vikaantuminen johtuu yksittäisviasta tai jonkin kertaluokan yhteisviasta
 $A_1 = C_1$ tai C_{12} tai C_{13} tai ... tai C_{1n} tai C_{123} tai ... tai $C_{123\dots n}$,
missä C_x on tietyn $\{A_1, \dots, A_n\}$ osajoukon vikaannuttava tapahtuma
- C_x ovat toisistaan riippumattomia perustapahtumia, minkä takia niiden käyttö soveltuu vikapuumallintamiseen
- $P(C_x)$ on sama samankokoiselle osajoukolle ja lasketaan jonkinlaisen kerroinmallin avulla yksittäisvian todennäköisyydestä
 - Beettakerroin-, alfakerroin-, MGL-malli
 - PRA-ohjelmistot tukevat tällaisia malleja

Yhteisvikamalleja (NUREG/CR-4780)

ESTIMATION APPROACH		MODEL	MODEL PARAMETERS*	GENERAL FORM FOR MULTIPLE COMPONENT FAILURE FREQUENCY
NONSHOCK MODELS	DIRECT	BASIC PARAMETER	$Q_1, Q_2, \dots, Q_m$	$Q_k = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, m$
	INDIRECT	BETA FACTOR	Q_t, β	$Q_k = \begin{cases} (1 - \beta) Q_t & k = 1 \\ 0 & m > k > 1 \\ \beta Q_t & k = m \end{cases}$
		MULTIPLE GREEK LETTERS	$Q_t, \underbrace{\beta, \gamma, \delta, \dots}_{m-1 \text{ PARAMETERS}}$	$Q_k = \frac{1}{\binom{m-1}{k-1}} \left(\prod_{i=1}^k \rho_i \right) (1 - \rho_{k+1}) Q_t$ $\rho_1 = 1, \rho_2 = \beta, \rho_3 = \gamma, \dots, \rho_{m+1} = 0$
		ALPHA FACTOR	$Q_t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$	$Q_k = \frac{k}{\binom{m-1}{k-1}} \frac{\alpha_k}{\alpha_t} Q_t \quad k = 1, \dots, m$ $\alpha_t \equiv \sum_{k=1}^m k \alpha_k$
SHOCK MODELS		BINOMIAL FAILURE RATE	Q_1, μ, ρ, w	$Q_k = \begin{cases} \mu \rho^k (1 - \rho)^{m-k} & k \neq m \\ \mu \rho^m + w & k = m \end{cases}$

Beettakerroinmalli

M komponentin malli

- $Q_1 = (1 - \beta)Q_{tot}, k = 1$
- $Q_k = 0, 1 < k < m$
- $Q_m = \beta Q_{tot}$
- Yksinkertainen, yksi parametri
- Yleensä käytetty vain kahden komponentin ryhmälle ($m = 2$)

Alfakerroinmalli

Alfa-kertoimet ($\alpha_1, \alpha_2, \dots$)
kuvaavat tietyn kertaluvun
tapahtumien osuutta

- $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$
- $Q_k = \frac{k}{\binom{m-1}{k-1} \alpha_{tot}} Q_{tot}$
- $\alpha_{tot} = \sum_{k=1}^m k \alpha_k$

Kaksi komponenttia

- $Q_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12} + 2\alpha_{22}} Q_{tot}$
- $Q_2 = \frac{2\alpha_{22}}{\alpha_{12} + 2\alpha_{22}} Q_{tot}$

Neljä komponenttia

- $Q_1 = \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 3\alpha_{34} + 4\alpha_{44}} Q_{tot}$
- $Q_2 = \frac{2}{3} \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 3\alpha_{34} + 4\alpha_{44}} Q_{tot}$
- $Q_3 = \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 3\alpha_{34} + 4\alpha_{44}} Q_{tot}$
- $Q_4 = \frac{4\alpha_{44}}{\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 3\alpha_{34} + 4\alpha_{44}} Q_{tot}$

Mutiple Greek Letter (MGL) malli

- Kertoimet kuvaavat ehdollista todennäköisyyttä seuravan kertaluvun yhteisvialle

Neljä komponentin ryhmän malli

- $Q_1 = (1 - \beta)Q_{tot}$
- $Q_2 = \frac{1}{3}\beta(1 - \gamma)Q_{tot}$
- $Q_3 = \frac{1}{3}\beta\gamma(1 - \delta)Q_{tot}$
- $Q_4 = \beta\gamma\delta Q_{tot}$
- Nykyään alfa-kerroinmalli on korvannut MGL-mallin
 - alfa-kertoimet sopivat paremmin epävarmuustarkasteluun

Binomial failure rate

Nykyään harvemmin käytetty malli, mutta voi olla käyttökelpoinen joissain yhteyksissä

- Q_I = independent failure frequency
- μ = frequency of non-lethal shocks
- p = conditional probability of failure of each component given non-lethal shock
- ω = frequency of lethal shock

m komponentin ryhmä:

- $Q_1 = Q_I + \mu p(1 - p)^{m-1}$
- $Q_k = \mu p^k (1 - p)^{m-k}$
- $Q_m = \mu p^m + \omega$

Järjestelmän luotettavuus

- Komponentin i tila on satunnaismuuttuja

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{jos komponentti } i \text{ ei toimi} \\ 1, & \text{jos komponentti } i \text{ toimii} \end{cases}$$

- Komponentin i luotettavuus $p_i = P[X_i = 1]$
 - Tilavektorista vastaavasti saadaan siis tn-vektori $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$
 - Huom! Tarkasteluajankohta täsmennettävä, muuten ei mielekäs määritelmä
- Järjestelmän luotettavuus $r(\mathbf{p}) = P[\phi(\mathbf{x}) = 1]$
 - Käytetään myös termiä luotettavuusfunktio
 - Voidaan määrittää odotusarvona $r(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{x})]$, koska $\phi(\mathbf{x})$ on binäärimuuttuja
- Esimerkkejä
 - Sarjajärjestelmä toimii, jos sen kaikki komponentit toimivat (oletetaan nämä riippumattomiksi) $\Rightarrow$

$$r(\mathbf{p}) = P[\phi(\mathbf{x}) = 1] = P\left[\prod_{i=1}^n X_i = 1\right] = \prod_{i=1}^n P[X_i = 1] = \prod_{i=1}^n p_i$$

- Rinnakkaisjärjestelmälle

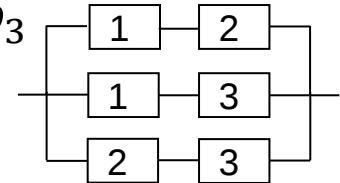
$$r(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

Luotettavuuden laskennasta (1/3)

• Toimintapolut

- Järjestelmä toimii, jos jokin toimintapolku kunnossa
- Luotettavuus on siis tn sille, että tilavektorina on toimintapolku
- Järjestelmän luotettavuus = toimintapolkujen tn:ien summa
- Esim. 2/3-järjestelmän toimintapolut (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)

$$r(\mathbf{p}) = (1 - p_1)p_2p_3 + (1 - p_2)p_1p_3 + (1 - p_3)p_1p_2 + p_1p_2p_3 \\ = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$



- Tn:ien p_i sijoittaminen X_i :iden paikalle rakennefunktiossa

$$\phi(X) = 1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3)$$

ei anna oikeaa odotusarvoa, koska tällöin tulee vääriä tulotermejä $(p_i)^2$.

Ts. binäärimuuttujille pätee

$$E[X_i^2] = E[X_i] = p_i$$

- Sama luotettavuus saadaan odotusarvona

$$E[\phi(X)] = E[1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3)] \\ = E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - X_1^2X_2X_3 - X_1X_2^2X_3 - X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2X_3^2] \\ = E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - 2X_1X_2X_3] = r(\mathbf{p})$$

Luotettavuuden laskennasta (2/3)

- Katkosjoukot

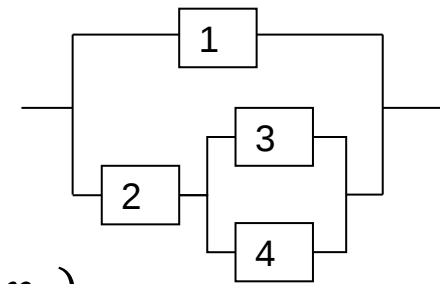
- Järjestelmä ei toimi, jos joku katkosjoukko toteutuu
- Luotettavuus saadaan siis vähentämällä yhdestä tn sille, että tilavektori on katkosjoukko

- Katkosjoukot

$(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1)$ ja $(0,1,0,0)$

- Näin luotettavuudeksi saadaan

$$r(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)p_4 - (1 - p_1)(1 - p_2)p_3(1 - p_4) - (1 - p_1)(1 - p_2)p_3p_4 - (1 - p_1)p_2(1 - p_3)(1 - p_4)$$



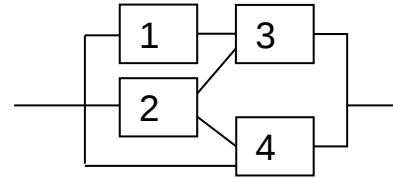
- Ehdollistaminen

- Järjestelmän toiminta voidaan ehdollistaa jonkun avainkomponentin toiminnalle

$$r(\mathbf{p}) = P(\phi(1_i, x_{-i}))P(x_i = 1) + P(\phi(0_i, x_{-i}))P(x_i = 0) \\ = r(1_i, p_{-i})p_{-i} + r(0_i, p_{-i})(1 - p_{-i})$$

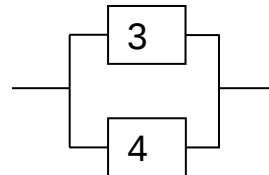
Luotettavuuden laskennasta (3/3)

- Ehdollistaminen (jatk.)
 - Tarkastellaan järjestelmää

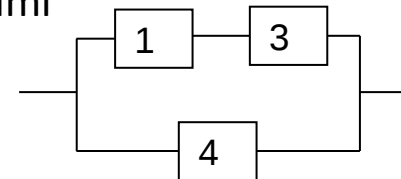


- Ehdollistetaan järjestelmän komponentille 2

A: Komponentti 2 toimii



B: Ei toimi



- A:n luotettavuus

$$r(\mathbf{p}^A) = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4)$$

- B:n luotettavuus

$$r(\mathbf{p}^B) = 1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_4)$$

- Koko järjestelmän luotettavuus siis

$$r(\mathbf{p}) = (1 - (1 - p_3)(1 - p_4))p_2 + (1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_4))(1 - p_2)$$

Luotettavuuden tärkeys

- Koherentissa järjestelmässä komponentin luotettavuuden tärkeyttä kuvaa

$$I_r(i) = \frac{\partial r(p)}{\partial p_i}, i = 1, \dots, n$$

- Ts. miten paljon järjestelmän luotettavuus muuttuu, jos yksittäisten komponentin luotettavuus muuttuu?
- Luotettavuuden ehdollistamiskaavaa käyttäen tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$I_r(i) = r(1_i, p_{-i}) - r(0_i, p_{-i})$$

- Kunnossapito kannattaa pyrkiä kohdentamaan luotettavuudeltaan tärkeimpiin komponentteihin
- Esim. sarjajärjestelmässä n nnen komponentin luotettavuus

Huom! Riskitärkeysmitoista tulee myöhemmin lisää. Tätä mittaa kutsutaan myös Birnbaumin mitaksi

$$r(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^n p_j$$

$$I_r(i) = \frac{\partial r(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \prod_{j \neq i} p_j$$

Ts. tärkeys suurin komponentille, jonka luotettavuus pienin (tällöin muiden tulo suurin)
– ”ketju on yhtä vahva kuin sen heikoin lenkki”

Laskenta-approksimoinneista (1/4)

- Huomioita

- Rakennefunktion käyttöön perustuvat em. laskutavat antavat tarkan luotettavuusarvon
- Komponenttien oletetaan kuitenkin olevan toisistaan riippumattomia vailla yhteisiä vikaantumissyitä
- Isoissa järjestelmissä tarkka laskenta tulee raskaaksi $\Rightarrow$ tarvitaan approksimaatioita
- Koherenttien järjestelmien approksimaatioiden ääripäinä sarja- ja rinnakkaisjärjestelmät, joten

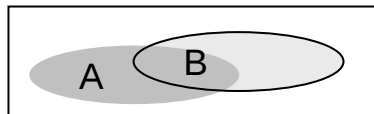
$$\prod_{i=1}^n p_i \leq r(p) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

- » Ei kuitenkaan kovin käyttökelpoinen – jos esim. neljä komponenttia yhteisellä tn:llä $p = 0.9$, niin rajoiksi saadaan $0.94 = 0.6561$ ja $1 - (1 - 0.9) \cdot 4 = 0.9999$, mitkä ovat liian väljät

Laskenta-approksimoineista (2/4)

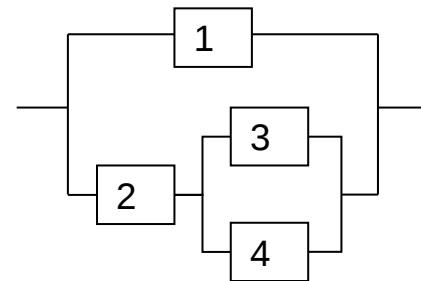
- Minimitoimintapolut ja -katkosjoukot
 - Järjestelmä voidaan kuvata sarjaankytkettyinä minimikatkosjoukkoina tai rinnakkainkytkettyinä minimitoimintapolkuina
 - Näistä saadaan luotettavuusrajat

$$\prod_{j=1}^k \left[1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right] \leq r(p) \leq 1 - \prod_{j=1}^s \left[1 - \prod_{i \in P_j} p_i \right]$$
 - Komponentit voivat olla useilla toimintapoluilla ja useissa katkosjoukoissa, kyse approksimaatiosta



Laskenta-approksimoinneista (3/4)

- Esimerkki
 - Minimitoimintapolut
 $\{1\}, \{2,3\}, \{2,4\}$
 - Minimikatkosjoukot
 $\{1,2\}, \{1,3,4\}$



Laskenta-approksimoineista (4/4)

- Esimerkki jatkuu

- Minimitoimintapoluista saadaan luotettavuudelle yläraja

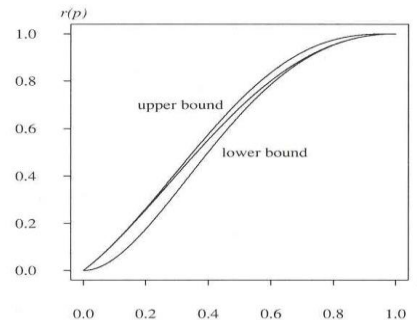
$$r(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2p_3)(1 - p_2p_4)$$

- Minimikatkosjoukoista saadaan luotettavuudelle alaraja

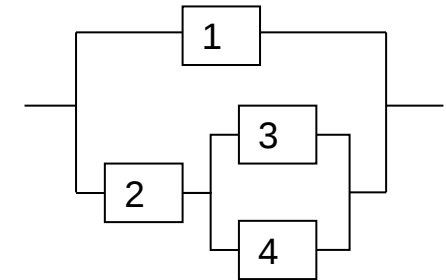
$$r(\mathbf{p}) = [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \times [1 - (1 - p_1)(1 - p_3)(1 - p_4)]$$

- Jos kaikkien komponenttien tn:t samoja, niin

$$(1 - (1 - p)^2)(1 - (1 - p)^3) \leq r(\mathbf{p}) \leq 1 - (1 - p)(1 - p^2)^2$$



- Tarkka arvo voidaan laskea seuraavista toisensa poissulkevista katkosvektoreista $(0,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,0,0)$



Komponenttien elinikä

- Komponentin elinikää kuvataan satunnaismuuttujalla T
 - Tiheysfunktio $f(t)$, kertymäfunktio $F(t)$
- Eloojäämisfunktio $S(t)$ (survivor function)
 - on se tn, että komponentti toimii ainakin ajanhetkeen t asti, ts. $S(t) = P[T \geq t], t \geq 0$
- Huomioita
 - Yleensä oletetaan, että komponentti on toimintakuntoinen tarkastelujakson alussa

$$\Rightarrow S(0) = 1$$
 - Jatkuville tn-jakaumille pätee

$$1 = P[T \leq t] + P[T \geq t] = F(t) + S(t)$$

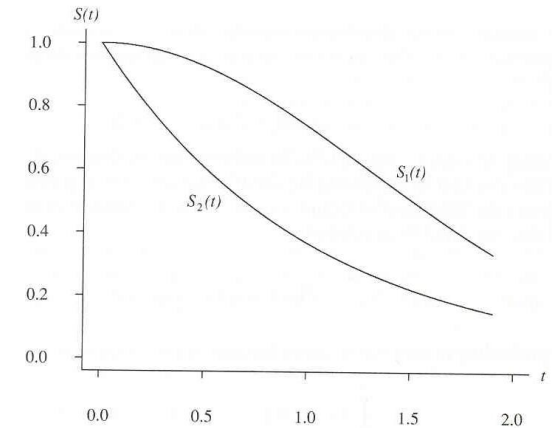
$$\Rightarrow S(t) = 1 - F(t)$$
 - Edelleen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t)) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$
 - Ehdollinen eloonjäämisfunktio $S_{T|T \geq a}(t)$ on tn sille, että järjestelmä toimii ainakin hetkeen t asti ehdolla, että se on toiminut hetkeen a asti (so. $t \geq a$)

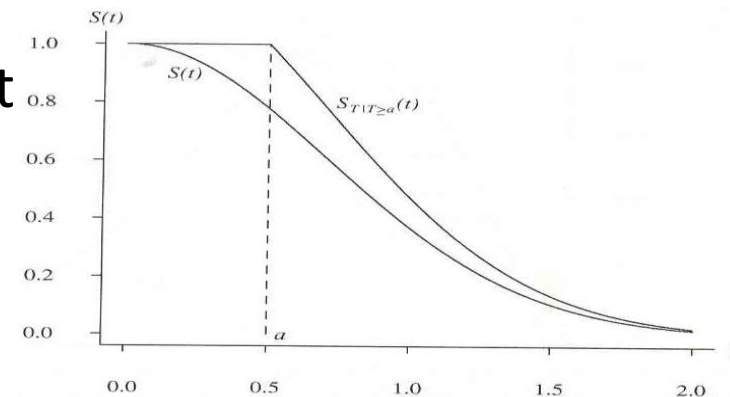
$$S_{T|T \geq a}(t) = \frac{P[T \geq a \wedge T \geq t]}{P[T \geq a]} = \frac{P[T \geq t]}{P[T \geq a]} = \frac{S(t)}{S(a)}, t \geq a$$

Esimerkkejä eloonjäämisfunktioista

- Seuraavista eloonjäämisfunktio $S_1(t)$ on parempi, koska $S_1(t) \geq S_2(t)$



- Ehdolliset eloonjäämisfunktiot
 - Esim. henkivakuutusten myyntiehdot voidaan ehdollistaa sille, minkä ikäinen vakuutettava henkilö on



Riskitaajuusfunktio

- Riskitaajuusfunktio (hazard function) kertoo, miten altis hetkeen t asti toiminut komponentti on vikaantumaan hetkellä t

- Sovelletaan raja-arvolaskentaa

$$P[t \leq T \leq t + \Delta | T \geq t] = \frac{P[t \leq T \leq t + \Delta]}{P[T \geq t]}$$

$$= \frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)}$$

- Keskimääräinen vikaantumistn Δ levyisellä intervallilla

$$\frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)\Delta}$$

- Hetkelliseksi vikaantumistaajuudeksi saadaan

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)\Delta}$$

- Todennäköisyystulkinta: millä tn:llä komponentti vikaantuu seuraavan Δ pituisena jaksena?

$$h(t)\Delta = P[t \leq T \leq t + \Delta | T \geq t]$$

- Huom!

- termiä hasardifunktio tai vioittuvuusfunktio käytetään samassa merkityksessä
- voidaan merkitä myös $z(t)$ tai $\lambda(t)$

Muita funktioita

- Kumulatiivinen riskitaajuusfunktio

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t -\frac{S'(\tau)}{S(\tau)} d\tau$$

$$= -\ln(S(t)) + \ln(S(0)) = -\ln(S(t))$$

- Saadaan siis $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$
- $H(t)$ kasvava ja $H(0) = 0$

- Jäljellä oleva elinikäodote

$$L(t) = E[T - t | T \geq t]$$

- Laskentaa varten tarvitaan ehdollinen tn-jakauma

$$f_{T|T \geq t}(\tau) = \frac{f(\tau)}{S(t)}, \tau \geq t$$

- Tällöin

$$L(t) = E[T - t | T \geq t] = \int_t^\infty (\tau - t) \frac{f(\tau)}{S(t)} d\tau = \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty \tau f(\tau) d\tau - t$$

Funktioista toiseen siirtymiset

	$f(t)$	$S(t)$	$h(t)$	$H(t)$	$L(t)$
$f(t)$	$\cdot$	$\int_t^\infty f(\tau) d\tau$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(\tau) d\tau}$	$-\log \left[\int_t^\infty f(\tau) d\tau \right]$	$\frac{\int_t^\infty \tau f(\tau) d\tau}{\int_t^\infty f(\tau) d\tau} - t$
$S(t)$	$-S'(t)$	$\cdot$	$\frac{-S'(t)}{S(t)}$	$-\log S(t)$	$\frac{1}{S(t)} \int_t^\infty S(\tau) d\tau$
$h(t)$	$h(t) e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau}$	$e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau}$	$\cdot$	$\int_0^t h(\tau) d\tau$	$\frac{\int_t^\infty e^{-\int_0^\tau h(y) dy} d\tau}{e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau}}$
$H(t)$	$H'(t) e^{-H(t)}$	$e^{-H(t)}$	$H'(t)$	$\cdot$	$e^{H(t)} \int_t^\infty e^{-H(\tau)} d\tau$
$L(t)$	$\frac{1+L'(t)}{L(t)} e^{-\int_0^t \frac{1+L'(\tau)}{L(\tau)} d\tau}$	$e^{-\int_0^t \frac{1+L'(\tau)}{L(\tau)} d\tau}$	$\frac{1+L'(t)}{L(t)}$	$\int_0^t \frac{1+L'(\tau)}{L(\tau)} d\tau$	$\cdot$

Eksponenttijakauma

- Elinikäfunctiot

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^t \frac{d}{dt} \left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) = [1 - e^{-\lambda t}]$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

$$L(t) = \frac{1}{\lambda}$$

- Eksponenttijakauma on muistiton

$$P[T - h \geq t | T \geq h] = \frac{P[T \geq h + t]}{P[T \geq h]} = \frac{S(h + t)}{S(h)} = \frac{e^{-\lambda(h+t)}}{e^{-\lambda h}} = e^{-\lambda t} = S(t)$$

$$= P[T \geq t]$$

Elinikäodote

- Elinikäodote on vakio

$$L(0) = E[T] = \int_0^{\infty} \tau \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau$$

$$= \lambda \left[\left. \tau \frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} d\tau \right|_0^{\infty} \right] = \left. \frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = L(t)$$

Lause. Eksponenttijakauma on ainoa muistiton jatkuva jakauma
Tod.

Muistittomuus tarkoittaa sitä, että $t, h > 0$ pätee

$$S(t + h) = S(t)S(h)$$

Tällöin kokonaisluvuille m, n pätee

$$S\left(\frac{m}{n}\right) = S\left(\frac{m-1}{n}\right) S\left(\frac{1}{n}\right) = S\left(\frac{m-2}{n}\right) S\left(\frac{1}{n}\right) S\left(\frac{1}{n}\right)$$

Tod. (jatkoa)

Kun $m = n$, niin saadaan

$$S(1) = \left(S\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \Rightarrow S\left(\frac{1}{n}\right) = S(1)^{\frac{1}{n}}$$

Sijoitetaan tämä edelliseen

$$S\left(\frac{m}{n}\right) = S(1)^{\frac{m}{n}}$$

Eloonjäämisfunktio jatkuva, joten suhde m/n voidaan korvata t :llä

$$S(t) = [S(1)]^t$$

Koska $S(0) = 1$ ja $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, niin on olemassa $\lambda > 0$ s.e. $S(1) = e^{-\lambda}$

On siis saatu $S(t) = e^{-\lambda t}$

m.o.t. (mikä olikin todistettava).

Vikaantumisalttius

- Komponenttien vikaantuminen
 - Jos vikataajuusfunktio $h(t)$ on kasvava, niin vikaantumistn kasvaa ajan myötä (wear-out)
 - » Tyypillinen tilanne, kun viat aiheutuvat kulumisesta
 - Jos vikataajuusfunktio $h(t)$ on vähenevä, niin vikaantumistn pienenee ajan myötä (burn-in)
 - » Voi olla tilanne uuden järjestelmän käyttöönotossa, kyse esimerkiksi alkuvaiheen 'lastentaudeista', joiden jälkeen järjestelmä toimii paremmin
 - Molempia tapauksia varten tarvitaan elinikämallia, joissa vikataajuus ei ole vakio
 - Useimmiten ei-vakioisia vikataajuusfunktioita mallinnetaan Weibull- ja gammajakaumilla
- Käyttötarkoituksia
 - Yksittäisten komponenttien riskianalyysit
 - Pisteprosessit, joissa komponentteja uusitaan
 - » Komponentin vikaantumisajankohtaa kuvaa satunnaismuuttuja T
 - » Korjaamiseen ja uusimiseen kuluva aika voidaan oletetaan merkityksettömäksi, jos kukin komponentti saadaan uudenveroiseksi viiveettä joko uusimalla tai korjaamalla

Weibull-jakauma (1/4)

- Ominaisuuksia
 - Soveltuu sellaisten prosessien mallintamiseen, jossa vikaantumistn muuttuu ajan myötä
 - Elinikää kuvaavat funktiot ($\kappa > 0, \lambda > 0, t \geq 0$)

$$f(t) = \kappa \lambda^\kappa t^{\kappa-1} e^{-(\lambda t)^\kappa}$$

$$S(t) = e^{-(\lambda t)^\kappa}$$

$$h(t) = \kappa \lambda^\kappa t^{\kappa-1}$$

$$H(t) = (\lambda t)^\kappa$$

- κ -muotoparametri määrittää jakauman muodon
 - » $\kappa < 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio vähenevä
 - » $\kappa = 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio vakio (ts. eksponenttijakauma Weibullin erikoistapaus)
 - » $\kappa > 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio kasvava
- Pätee

$$E[T^r] = \frac{r}{\kappa \lambda^r} \Gamma\left(\frac{r}{\kappa}\right)$$

- Ts. odotusarvo- ja muut momentit saadaan gamma-funktiosta, joka on taulukoitu
 - Elinikäodote $L(t)$ ei esitettävissä suljetussa muodossa

Weibull-jakauma (2/4)

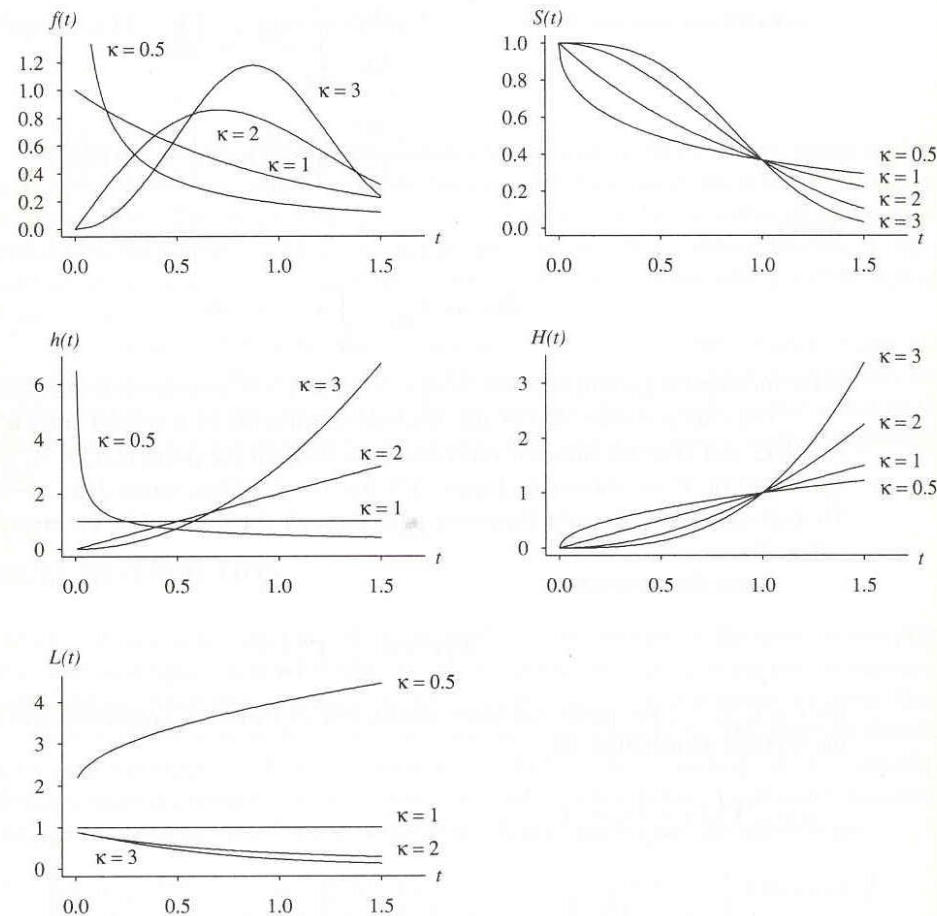


Figure 4.7 Lifetime distribution representations for the Weibull distribution.

Weibull-jakauma (3/4)

- Esim. virtakytkimen toiminta
 - Toiminta-aika noudattaa Weibull-jakaumaa parametrein $\lambda=0.0014 \text{ vrk}^{-1}$ ja $\kappa=1.28$.
 - Miten kauan kytkin odotusarvoisesti kestää?
 - Millä t_n :llä se kestää vähintään 500 vrk:ta?
 - Entä vähintään vielä 500 vrk:ta, jos se on toiminut 200 vrk:ta?

Weibull-jakauma (4/4)

- Ratkaisu

- Odotusarvo saadaan kaavasta

$$E[T] = \frac{1}{0.0014 \times 1.28} \Gamma\left(\frac{1}{1.28}\right) = 661.8$$

- Tn sille, että kytkin kestää vähintään 500 vrk:ta saadaan eloonjäämisfunktioista

$$S(500) = e^{-(0.0014 \times 500)^{1.28}} = 0.531$$

- Ehdollinen tn sille, että kytkin toimii vähintään t vrk:ta, jos se on jo toiminut 200 vrk:ta

$$S_{T|T \geq 200}(t) = \frac{S(t)}{S(200)} = \frac{e^{-(0.0014 \times t)^{1.28}}}{e^{-(0.0014 \times 200)^{1.28}}}, t \geq 200$$

mistä saadaan

$$S_{T|T \geq 200}(700) = \frac{S(700)}{S(200)} = 0.459$$

- Tämä tn pienempi kuin $S(500)$, syynä kasvava vikataajuusfunktio, $\kappa = 1.28 > 1$

Gammajakauma (1/2)

- Elinikäfunctiot

$$f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\kappa)} (\lambda t)^{\kappa-1} e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda}{\Gamma(\kappa)} (\lambda \tau)^{\kappa-1} e^{-\lambda \tau} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_0^{\lambda t} x^{\kappa-1} e^{-x} dx$$

$$E[T^r] = \frac{\kappa(\kappa + 1)(\kappa + 1) \dots (\kappa + r - 1)}{\lambda^r}$$

- $\kappa = 1$ antaa erikoistapauksena eksponenttijakauman
- Eloönjäämisfunktio ei esitettävissä suljetussa muodossa
 - » Sama koskee myös kumulatiivista riskitaajuusfunktiota $H(t)$ ja jäljellä olevaa elinikä-odotetta $L(t)$
 - » Mm. näistä syistä Weibullin jakauma on käytännössä yleisempi kuin Gamma-jakauma

- Erlangin jakauma

- Jos $T_1, T_2, \dots, T_n$ ovat toisistaan riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla λ , niin $\sum_{i=1}^n T_i$ noudattaa Erlangin jakaumaa (= gammajakauma, missä $\kappa = n$)

$$f(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}, S(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Gammajakauma (2/2)

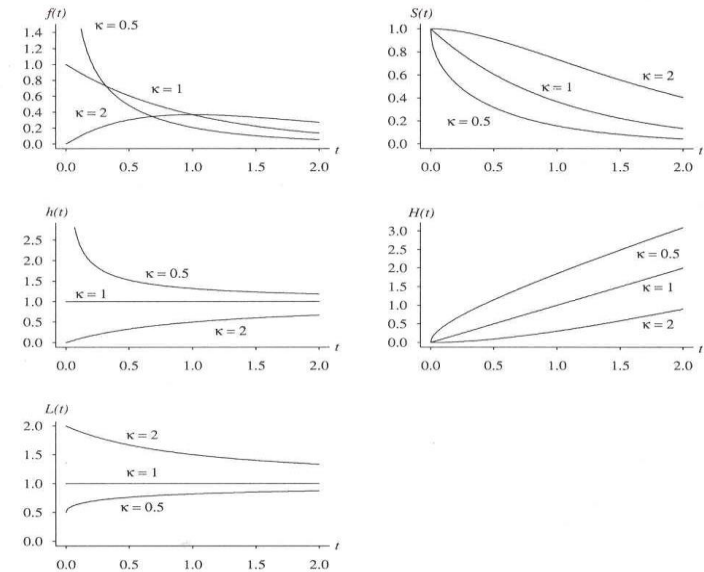


Figure 4.8 Lifetime distribution representations for the gamma distribution.

- Esim. turvallisuuskriittinen varustaminen
 - Luotaimen viestintäjärjestelmän komponentin on toimittava avaruudessa 10 v kuluttua vähintään todennäköisyydellä 99,99%. Montako varakomponenttia on otettava mukaan, jos komponentin vikaantumistaajuus on $\lambda = 0.025/v$?
- Ratkaisu
 - Erlangin jakauman perusteella n komponentista muodostuva järjestelmä toimii 10 v päästä tn :llä
 - $S_n(10) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(0.025 \times 10)^k}{k!} e^{-0.025 \times 10}$
 - Koska $S_3(10) = 99.987\%$ ja $S_4(10) = 99.999\%$ niin oltava ainakin 4 komponenttia eli 3 varalle

Vikaantumisten lukumäärä

- Notatiota
 - Järjestelmä otetaan käyttöön ajanhetkellä T_0
 - Komponentti vikaantuu hetkellä T_1 ja se joko korjataan tai korvataan uudella viipymättä
 - Tämä korjattu/korvattu komponentti vikaantuu hetkellä T_2 , jolloin sille tehdään samoin
 - Näin menetellen hetkeen t mennessä tarvitaan komponentteja

$$N(t) = \max\{k | T_k \leq t\}$$

- Laskentaprosessin ominaisuuksia
 - $N(t)$ on ei-vähenevä
 - Jos $t_1 < t_2$, niin $N(t_2) - N(t_1)$ on aikavälin $(t_1, t_2]$ kuluessa vikaantuneiden komponenttien lukumäärä
 - Prosessilla on riippumattomat lisäykset, jos minkä tahansa kahden toisiaan leikkaamattoman aikavälin $(t_1, t_2]$ ja $(t_3, t_4]$ aikana tapahtuneiden vikaantumisten lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia
 - Prosessi on stationaarinen (stationary), jos minkä tahansa aikavälin kuluessa vikaantuneiden komponenttien lukumäärä riippuu vain aikavälin pituudesta
 - Uusiutumisprosessissa (renewal process) vikaantumistapahtumien väliset ajat ovat toisistaan riippumattomia ja identtisesti jakautuneita

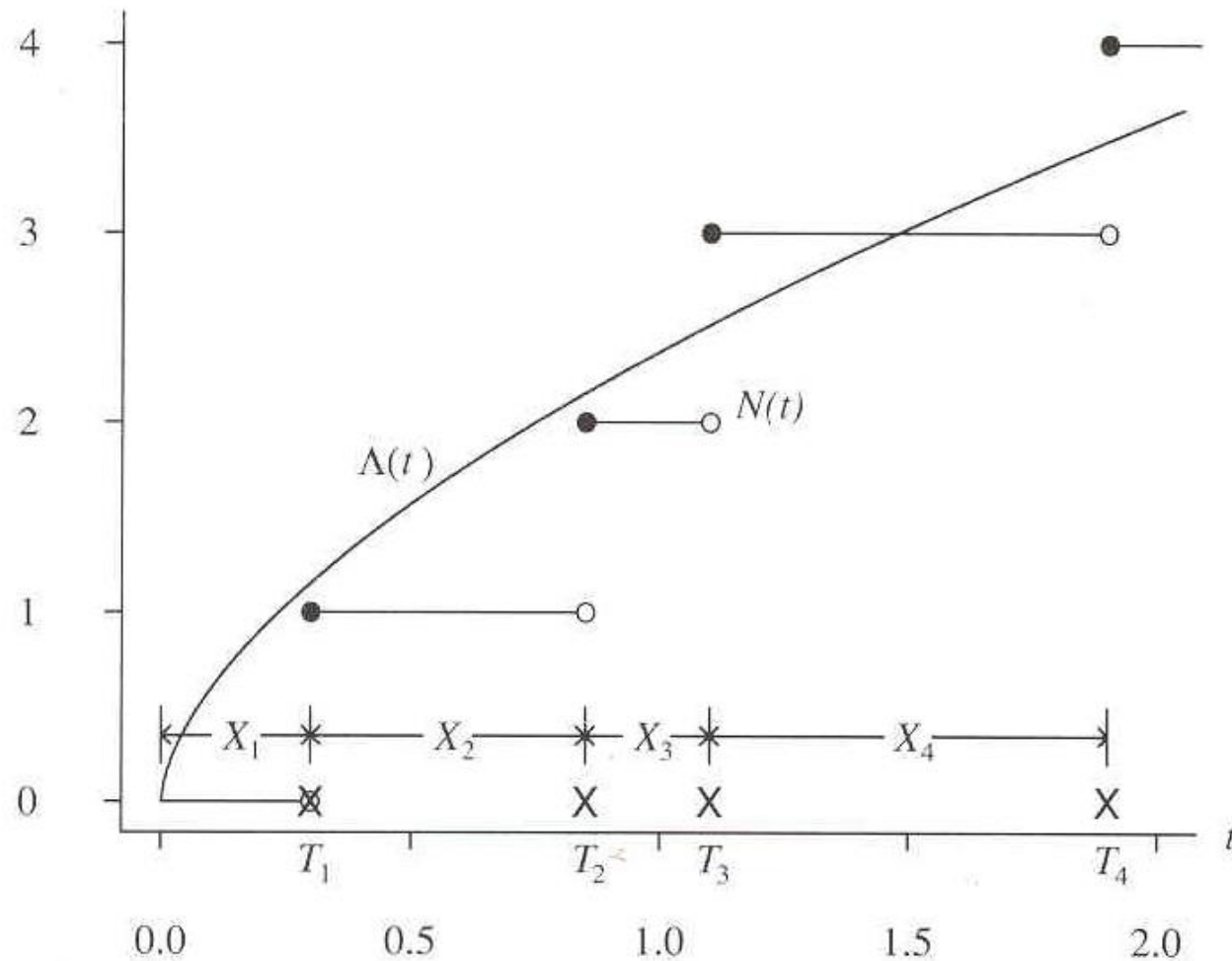


Figure 6.6 Point process realization.

Homogeeninen Poisson-prosessi

- Poisson-prosessi parametrilla λ toteuttaa seuraavat ehdot
 - Alussa hetkellä $t = 0$ vikaantumisten lkm $N(0) = 0$
 - Toisiaan leikkaamattomien aikavälien aikana tapahtuneiden vikaantumisten lukumäärät ovat riippumattomia
 - Minkä tahansa t :n levyisen aikavälin aikana vikaantumisten lkm on Poisson-jakautunut parametrilla λ siten, että

$$P[N(t_2) - N(t_1) = n] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^n}{n!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

missä $n = 0, 1, 2, \dots$

- Esim.
 - Tarkastellaan edellistä avaruusluotainta. Mikä on todennäköisyys sille, että 7 vuoden päästä vikaantuneita komponentteja on tasan 2?
- Ratkaisu

$$P[N(t) = n] = \frac{[\lambda t]^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

joten

$$P[N(7) = 2] = \frac{[0.025 \times 7]^2}{2!} e^{-0.025 \times 7} = 1.23\%$$

Ei-homogeeninen Poisson-prosessi

- Ominaisuuksia

- Vikaantumiset eivät tapahdu vakiotaaajuudella, vaan niitä tapahtuu aikariippuvan funktion $\lambda(t)$ mukaisesti; tätä kutsutaan intensiteettifunktioksi
- Kunnoltaan huononeva (paraneva) järjestelmä mallinnetaan kasvavalla (vähenevällä) $\lambda(t)$:llä
- Hetkeen t mennessä ilmenneiden vikatapahtumien odotusarvoinen lkm saadaan kumulatiivisesta intensiteettifunktiosta

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$$

- Tasan n komponenttia vikaantuu aikavälillä $(a, b]$ todennäköisyydellä

$$P[N(b) - N(a) = n] = \frac{\left[\int_a^b \lambda(\tau) d\tau \right]^n}{n!} e^{-\int_a^b \lambda(\tau) d\tau}$$

- Huomioita

- Ensimmäisen komponentin vikaantumiseen kuluva odotusarvoinen aika sama kuin yksittäisen komponentin vikataajuusfunktiolla $\lambda(t)$
- Sen sijaan myöhemmät vikaantumiset riippuvat intensiteettifunktiosta $\Rightarrow$ komponenttien myöhemmät vikaantumisvälit riippuvat siitä, milloin aiemmat vikaantumiset ovat tapahtuneet
- $\Rightarrow$ Ei siis enää kyse uusiutumisprosessista!

Ei-homogeeninen Poisson-prosessi

- Esimerkki virtakytkin
- Olkoon intensiteettifunktio

$$\lambda(t) = \kappa \lambda^\kappa t^{\kappa-1}, t > 0$$

parametrein $\lambda = 0.0014$ ja $\kappa = 1.28$ (so. sama kuin Weibull-jakauman vikataajuusfunktio kalvolla 26).

Millä todennäköisyydellä tämän intensiteetin mukaisesti huonontuvassa järjestelmässä komponentti vikaantuu kolme kertaa 1000 vrk:n kuluessa

- Ratkaisu
 - Nyt

$$\Lambda(t) = \int_0^t \kappa \lambda^\kappa \tau^{\kappa-1} d\tau = (\lambda t)^\kappa$$

- Täten

$$\begin{aligned} P[N(1000) = 3] &= \frac{\left[\int_0^{1000} \lambda(\tau) d\tau \right]^3}{3!} e^{-\int_0^{1000} \lambda(\tau) d\tau} \\ &= \frac{[0.0014 \times 1000]^{1.28 \times 3}}{3!} e^{-[(0.0014 \times 1000)^{1.28}]} = 13.0\% \end{aligned}$$

Järjestelmien ylläpidosta

- Periaatteellisia vaihtoehtoja
 - Uusiminen (replacement)
 - Ennaltaehkäisevä huolto (maintenance)
 - Korjaaminen (repair)
- Uusiminen
 - Vioittuneet komponentit korvataan uusilla
 - Myös muita komponentteja voidaan uusia
 - » Uusiminen tehdään jonkin politiikan mukaisesti (ks. seuraavat kalvot)
- Ennaltaehkäisevä huolto
 - Huollolla pyritään estämään vikaantumiset
 - » Esim. lentokoneen huolto – vikaantumisia ei haluta
 - Huollon yhteydessä vikaantuneet komponentit korjataan tai uusitaan
 - » Vrt. auton huolto (jarrupalat jne.)
 - Kysymyksiä
 - » Miten usein huollot pitäisi tehdä? missä laajuudessa?
- Korjaaminen
 - Järjestelmä korjataan vain sen vikaantuessa
 - » Esim. satelliitit – ennaltaehkäisevä huolto liian kallista
 - Kysymyksiä
 - » Ikääntyvissä järjestelmissä usein enemmän vikoja – missä vaiheessa korjaaminen ei enää kannata?

Järjestelmien korjaaminen

- Komponenttien uusiminen
 - Kun komponentti vikaantuu, se vaihdetaan uuteen
 - » Esimerkiksi lamppujen vaihto
 - Kysymyksiä
 - » Montako komponenttia pitäisi olla varastossa, jotta varastoimisen ja vikaantumishäiriöiden yhteenlasketut kustannukset minimoituvat?
 - » Onko vikaantuneet komponentit pakko uusia heti?
 - » Minkä politiikan mukaan komponentit pitäisi uusia?
- Uusimispolitiikkoja
 - Vikaantumisperustainen (failure replacement):
 - » Kukin komponentti uusitaan vain sen vikaantuessa
 - Ikääntymisperustainen (age replacement)
 - » Kukin komponentti uusitaan, kun se
 - vikaantuu tai
 - sen käyttöikä saavuttaa asetetun uusimisvälin c (kumpi näistä sitten toteutuukin komponentin kohdalla ensiksi)
 - Eräperustainen (block replacement)
 - » Komponentti uusitaan, kun se
 - vikaantuu tai
 - tullaan uusimisajankohtaan $c, 2c, 3c, \dots$, jolloin kaikki komponentit uusitaan
 - » Voidaan joutua uusimaan sellaisiakin komponentteja, jotka ovat toimivia ja jotka ovat olleet toiminnassa vain vähän aikaa

Uusimispolitiikkojen vertailua

- Huomioita

- Kun $c \rightarrow \infty$, ikääntymis- ja eräperustainen uusiminen lähestyvät vikaantumisperustaista
- Ikääntymisperustaisessa uusimisessa tarvitaan odotusarvoisesti enemmän komponentteja kuin vikaantumisperustaisessa
 - » Näin siksi, että uusitaan myös komponentteja, jotka saavuttavat uusimisvälinsä toimintakunnossa
- Eräperustaisessa tarvitaan odotusarvoisesti enemmän komponentteja kuin ikääntymisperustaisessa
 - » Näin siksi, että uusitaan myös komponentteja, jotka ovat toimivia ja jotka eivät ole vielä olleet toiminnassa koko uusimisväliä
- Pätee siis

$$n_f(t) \leq n_a(t) \leq n_b(t), t > 0$$

missä $n_f(t)$, $n_a(t)$, $n_b(t)$ ovat hetkeen t mennessä tarvittavien uusien komponenttien lkm:t vikaantumis-, ikääntymis- ja eräperustaisessa uusimisessa

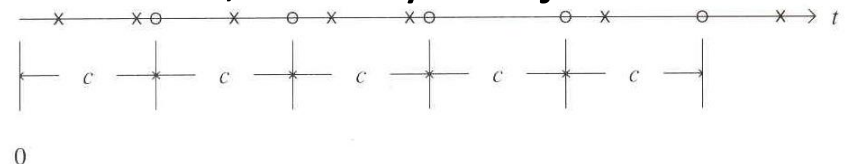


Figure 6.3 Block replacement policy.

Korjaukset ja käytettävyys

- Järjestelmien korjaamisesta
 - Testaamiseen, korjaamiseen ja uusimiseen menee usein aikaa, mitä pisteprosessikuvaus ei ota huomioon
 - Merkitään X_i :llä i :nteen vikaantumiseen ja R_i :llä i :nteen korjaamiseen kuluvaa aikaa
 - Järjestelmän tila riippuu nyt siitä, miten kauan vikaantumiseen ja korjaamiseen kuluu aikaa
 - Merkitään järjestelmän tilaa muuttujalla

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos järjestelmä toimii hetkellä } t \\ 0, & \text{jos järjestelmä ei toimi hetkellä } t \end{cases}$$

- Käytettävyys (availability, $A(t)$)
 - Tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla järjestelmä on toimintakuntoinen jonakin ajankohtana tai aikavälinä
 - Lähestyy ajan kuluessa vakioraja-arvoa, kun X_i :n ja R_i :n jakaumat pysyvät samoina
 - Voidaan käsitteenä täsmentää eri tavoin

Käytettävyys

- Hetkittäinen käytettävyys

- Engl. point availability

$$A(t) = P[X(t) = 1] = E[X(t)], t > 0$$

- Sama kuin eloonjäämisfunktio $S(t)$ komponentille, jota ei voida korjata

- Raja-arvoinen käytettävyys

- Engl. limiting availability

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

- Miten ison osan ajasta järjestelmä toimii ”pitkässä juoksussa”?

- Keskimääräinen käytettävyys välillä $(0, c]$

- Engl. average availability

$$A_c = \frac{1}{c} \int_0^c A(t) dt, c > 0$$

- Miten ison osan aikavälistä $(0, c]$ järjestelmä toimii odotusarvoisesti ?

- Raja-arvoinen keskim. käytettävyys

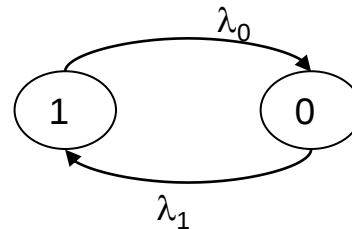
- Engl. limiting average availability

$$A_\infty = \lim_{c \rightarrow \infty} A_c$$

- Miten suuren osan ajasta ylipäätään järjestelmä toimii?

Käytettävyyden määrittäminen

- Lähtökohtia
 - Oletetaan, että X_i ja R_i ($i = 1, 2, \dots$) ovat toisistaan riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrein λ_0 ja λ_1



- Aikavälin $(t, t + \Delta]$ päättyessä järjestelmä toimii, jos
 - » se toimi hetkellä t eikä hajonnut ennen $t + \Delta$:tä, tai
 - » se ei toiminut hetkellä t , mutta korjattiin ennen $t + \Delta$:tä
- Saadaan siis

$$A(t + \Delta) = (1 - \lambda_0)A(t) + \lambda_1 \Delta (1 - A(t))$$

$$\Rightarrow \frac{A(t + \Delta) - A(t)}{\Delta} = -(\lambda_0 + \lambda_1)A(t) + \lambda_1$$

- Kun $\Delta \rightarrow 0$, niin

$$A(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t}, t > 0$$

Käytettävyys ja vikaantumisajat

- Keskimääräinen käytettävyys

$$A_c = \frac{1}{c} \int_0^c \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{c} \left[\frac{c\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} - \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 + \lambda_1)^2} e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)c} + \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 + \lambda_1)^2} \right]$$

- Vain ensimmäinen termi jää jäljelle, kun $c \rightarrow \infty$

- Raja-arvoja

- Raja-arvoinen käytettävyys siis

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}$$

- Koska keskimääräinen vikaantumisaika MTTF = $1/\lambda_0$ (mean time to failure) ja korjausaika MTTR = $1/\lambda_1$ (mean time to repair), niin kertomalla yllä osoittaja että nimittäjä termillä $1/(\lambda_0 \lambda_1)$ saadaan

$$A = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

- Raja-arvoinen käytettävyys riippuu siitä, miten nopeasti järjestelmä saadaan korjattua suhteessa siihen, miten nopeasti se vikaantuu
- Tämä pätee myös, kun korjausaika toisin jakautunut (esim. korjaus kestoltaan vakiopituinen)

Esimerkkejä käytettävyydestä (1/2)

- Esim. uusiutumisprosessi
 - Oletetaan järjestelmän vikaantuminen ja korjaaminen eksponenttijakautuneiksi. Keskimääräinen vikaantumisaika on 1000 tuntia ja korjausaika 10 tuntia. Järjestelmä on aluksi toimintakunnossa.
 - Mikä on järjestelmän
 - » toimintatodennäköisyys hetkellä $t = 10$?
 - » raja-arvoinen käytettävyys?
 - » keskimääräinen käytettävyys välillä $(0,10]$?
- Ratkaisu
 - Nyt $\lambda_0 = 1/\text{MTTF} = 0.001$ ja $\lambda_1 = 1/\text{MTTR} = 0.1$, joten

$$A(10) = \frac{0.1}{0.1 + 0.001} + \frac{0.1}{0.1 + 0.001} e^{-(0.001+0.1) \times 10} = 99.37\%$$
 - Raja-arvoinen käytettävyys saadaan, kun hetkittäisessä käytettävyydessä $t \rightarrow \infty$

$$A = \frac{0.1}{0.1 + 0.001} = 99.01\%$$
 - Keskimääräinen käytettävyys

$$A(t) = \frac{1}{10} \left[\frac{0.1 \times 10}{0.101} + \frac{0.001}{(0.101)^2} (1 - e^{-0.101 \times 10}) \right] = 99.63\%$$

Esimerkkejä käytettävyydestä (2/2)

- Esim. laatuohjelman suunnittelu
 - Laatuohjelman avulla pyritään kaksinkertaistamaan keskimääräinen vikaantumisaika sekä puolittamaan keskimääräinen korjausaika. Jos nämä tavoitteet saavutetaan, mikä on laatuohjelman vaikutus järjestelmän käytettävyyteen?

- Ratkaisu

- Ennen laatuohjelmaa järjestelmä on poissa käytöstä ajan

$$1 - A_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$$

- Laatuohjelman jälkeen vastaava osuus ajasta on

$$1 - A_2 = 1 - \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0} = \frac{1/2\lambda_0}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0}$$

- Suhteeksi saadaan siis

$$\frac{1 - A_2}{1 - A_1} = \frac{1/2\lambda_0}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0} \times \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{4\lambda_1 + \lambda_0}$$

- Usein λ_0 olennaisesti pienempi kuin λ_1 , joten aika, jona järjestelmä ei ole käytettävissä, alenee noin neljäsosaansa