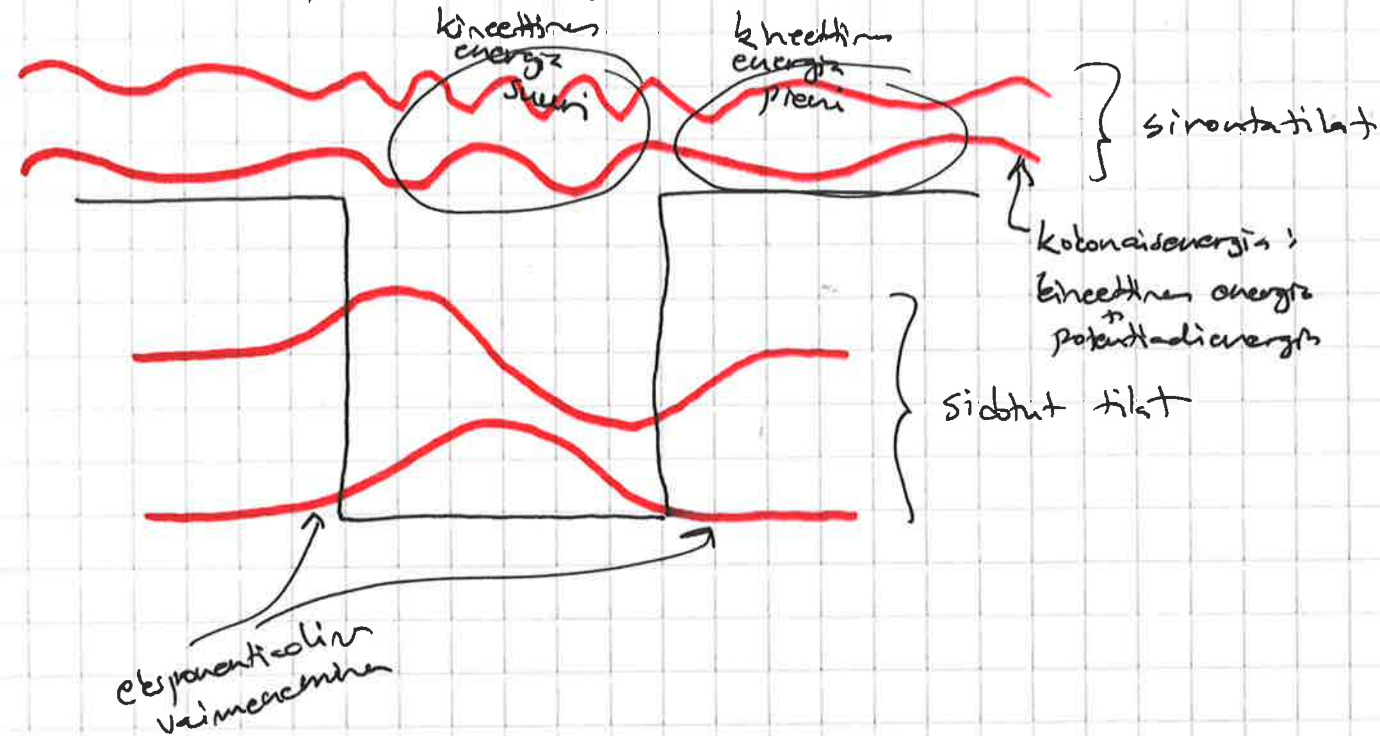
Äärellinen potentiaalikuoppa



Kompleksiluvut

Reaalilukujen $\mathbb{R}$ laajennos kompleksilukuihin $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{ z : z = a + ib \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \},$$

missä $i = \sqrt{-1}$ imaginääriyksikkö.

Laskutoimitukset

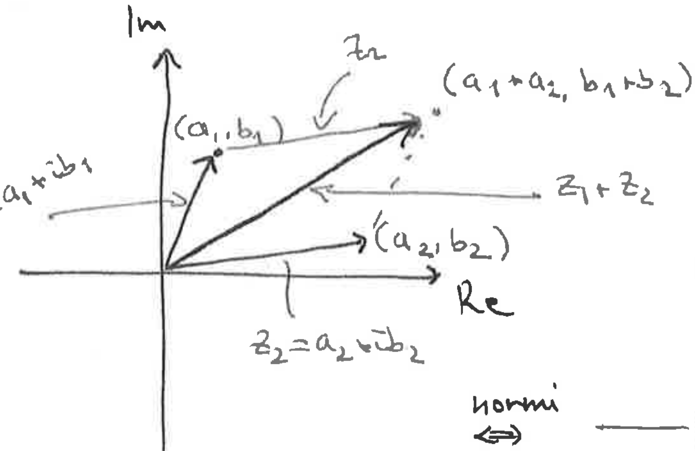
$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$ yhteen- ja vähennyslasku

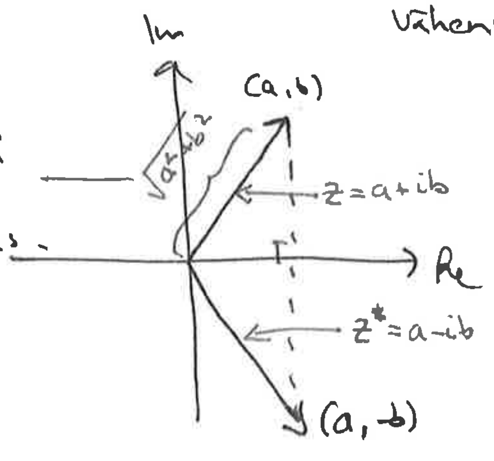
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_2 + ib_1 \cdot ib_2 \\ &= a_1 a_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$$ tulo

$$\bar{z} = z^* = (a + ib)^* = a - ib$$ kompleksikonjugaatti

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$ normi



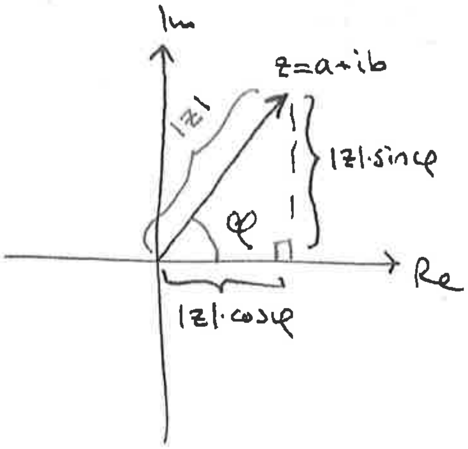
kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku $\Longleftrightarrow$ vektorien yhteen- ja vähennyslasku.



normi $\Longleftrightarrow$ vektorin pituus.

kompleksikonjugaatti $\Longleftrightarrow$ peilaus reaaliakselin suhteen.

Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys



$$z = a+ib = |z|\cdot\cos\varphi + i|z|\cdot\sin\varphi$$

$$= |z|\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{Eulerin kaava } = e^{i\varphi}}$$

$$= \underbrace{|z|}_{\text{normi}}\cdot e^{i\varphi}$$ ← argumentti tai vaihe

Erityisesti: jos $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x = |x|\cdot e^{i\varphi} \quad ; \quad \varphi = 0 \text{ jos } x>0, \quad \varphi = \pi \text{ jos } x<0.$$

Myös käy $e^{i(\varphi+n2\pi)} = e^{i\varphi} \Rightarrow x = |x|\cdot e^{i(\varphi+n2\pi)}$

jos $\underline{x>0}$: $x = |x|\cdot e^{in2\pi}$; $n \in \mathbb{Z}$.

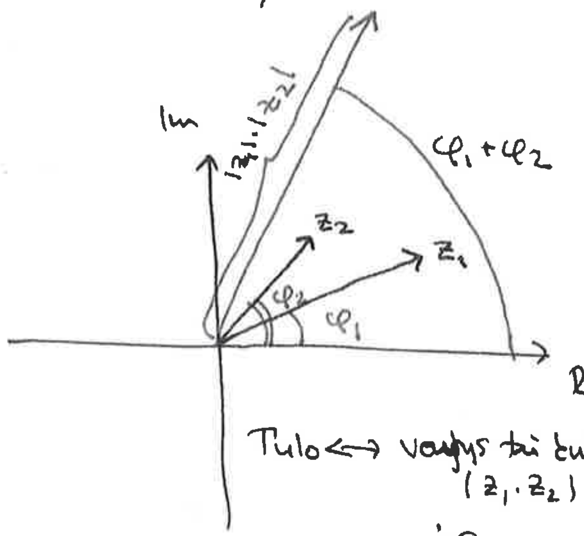
jos $\underline{x<0}$: $x = |x|\cdot e^{i\pi + in2\pi}$; $n \in \mathbb{Z}$.

Kompleksilukujen tulo

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1}\cdot|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}$$

$$= |z_1\cdot z_2|\cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$$

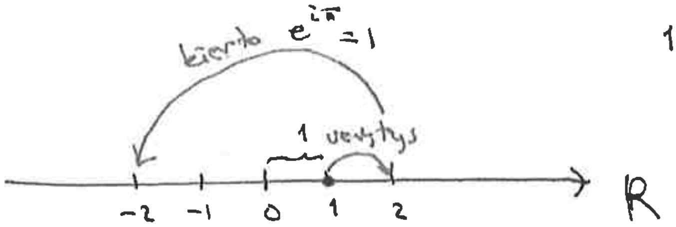
$$= |z_1\cdot z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$



Tulo ⟷ venytys tai kutistus ($|z_1\cdot z_2|$) ja kierto

Erityisesti reaalilukujen kertolasku, esim. $1\cdot(-2) = -2$:

$$1\cdot(-2) = 1\cdot 2\cdot e^{i\pi} = 2\cdot e^{i\pi} = -2.$$



Kooste:

Kvanttimekaanisen systeemin aaltofunktio (eli tila) on:
(merk. $\varphi(x)$ tai $|\varphi\rangle$)

- funktioavaruuden alkio
  - funktioavaruus on <u>vektoriavaruus</u>
  - siinä on määritelty sisätulo

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int \psi^*(x)\,\varphi(x)\,dx$$

  - sen virittää kantatilat $|n\rangle$.
    (kantavektorit).
  - tila voidaan esittää kantavektorien superpositiona

$$|\varphi\rangle = \sum_m \alpha_m |n\rangle$$

Observaabelin ominaistilat ja -arvot kertovat mittaustulokset ja niitä vastaavat tilat:

$$|\varphi\rangle = \sum_m \alpha_n |n\rangle$$

todennäköisyys-amplitudi

$$P_n = |\alpha_n|^2$$

→ jos mittaustulos "n"
→ romahdus tilaan
$|\varphi\rangle \to |n\rangle$.

Kommutaatiorelaatiot

Eri operaattoreilla on erilaiset ominaistilat eli tila-avaruuden virittävät kantatilat.

Joskus kuitenkin kantatilat ovatkin samat! Tällöin voimme määrittää molempiin operaattoreihin liittyvät ominais-arvot yhtäaikaa.

Jos operaattorit <u>kommutoivat</u> on niillä yhteiset ominaistilat.

Kommutointirelaatio operaattoreille $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ on:

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Jos $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

→ yhteiset ominaistilat.

Esim. $$\left[\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}\right] = \hat{p}\cdot\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hat{p}^2}{2m}\cdot\hat{p}$$

$$= \frac{\hat{p}^3}{2m} - \frac{\hat{p}^3}{2m} = 0.$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \dots = i\hbar \neq 0!$$

→ epätarkkuusperiaate.