Tieteellinen esitystapa:

Lämmittelykysymys: Kuinka suuri on Marsin ja auringon välinen etäisyys?

A) $2{,}27 \cdot 10^{10}$ m

B) $2{,}27 \cdot 10^{11}$ m

C) $2{,}27 \cdot 10^{12}$ m

Aika vaikea sanoa jos ei nyt heti löydy muistista!

Palaamme asiaan...

Mitä ero lausahduksissa?

"Marsin ja auringon välinen etäisyys on 1,52 AU."

ja

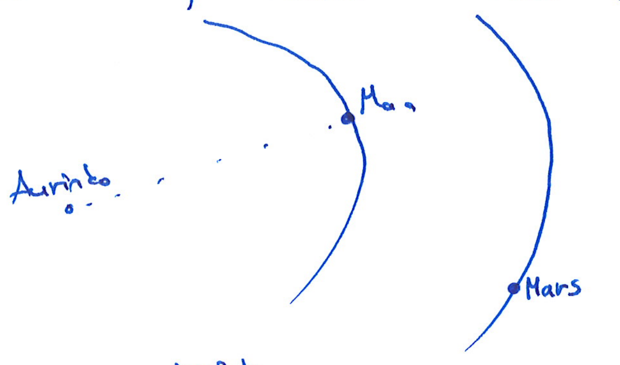
"Marsin ja auringon välinen etäisyys on 227'388'763'403,2 m."

(1 AU = Maan ja auringon välinen keskimääräinen etäisyys
= 149'597'870'660 m)

Mitä ero?

$$\left\{ \begin{array}{l} 1{,}52 \text{ AU} \\ 2{,}27 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{array} \right. ?$$

Mitä kertoja haluaa välittää?



1,52 AU havainnollistaa Maan ja Marsin kiertoratojen suhteen.

(Alun lämmittelykysymys:
$$\left\{ \begin{array}{l} 0{,}152 \text{ AU} \\ 1{,}52 \text{ AU} \\ 15{,}2 \text{ AU} \end{array} \right.$$
helpompi!)

Toisaalta: Aurinko • $\underbrace{\hspace{3cm}}_{2{,}27\cdot 10^{11}\text{ m}}$ • Mars — valolta kuluu aika $\dfrac{2{,}27\cdot 10^{11}\text{ m}}{3\cdot 10^{8}\text{ m/s}} \approx 7\cdot 10^{2}\text{ s} \approx \underline{12\text{ min}}$

Yksiköt ja dimensiot

Vapaus valita suureen (esim. Marsin ja auringon välinen etäisyys) erityinen yksikkö (metri, AU, valosekunti, tuuma, merimaili....)

Kaikilla mahdollisilla yksiköillä oltava kuitenkin sama dimensio (yo. esimerkissä "pituus")

Dimensiot ovat:

- pituus L
- massa M
- aika T
- lämpötila Θ
- varaus Q

$\Big\}$ riittävät meidän kurssillamme

Joskus vielä lisätään ainemäärä ja valovoima.

Jokainen fysikaalinen suure, muuttuja ja luonnonvakio on näiden dimensioiden potenssien tulo.

Esim.

Voima $[F] = \dfrac{ML}{T^2} = M^1 L^1 T^{-2}$

tiheys $[\rho] = \dfrac{M}{L^3} = M^1 L^{-3}$

Newtonin gravitaatiovakio $[\gamma] = \dfrac{[F]}{[m^2]} \cdot [r^2] = \dfrac{MLT^{-2}}{M^2} L^2 = M^{-1} L T^{-2}$.

Kaikki fysiikan yhtälöt ovat dimensionaalisesti homogeeniset:

"putoavan kappaleen korkeus h ajanhetkellä t on:

$$h(t) = a + \frac{b}{c} \cdot \ln(\cosh(ct))$$

• yhtälön molemmilla puolilla oltava sama dimensio

$$\underbrace{[h(t)]}_{L} = \underbrace{\left[a + \frac{b}{c} \ln(\cosh(ct))\right]}_{L}$$

• yhteenlaskettavilla oltava sama dimensio

$$= \underbrace{[a]}_{L} + \underbrace{\left[\frac{b}{c} \cdot \ln(\cosh(ct))\right]}_{L}$$

• funktioiden argumentit ovat dimensiottomia (poislukien potenssifunktiot)

$$\Rightarrow \ln(\cosh(\underbrace{ct}_{[ct]=1}))$$

• tulon dimensio = dimensioitten tulo

$$[ct] = [c]\underbrace{[t]}_{T} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{[c] = \frac{1}{T} = T^{-1}}}.$$

$$\Rightarrow h(t) = \underbrace{a}_{\underline{\underline{[a]=L}}} + \frac{b}{c} \ln(\cosh(ct))$$

$$\left[\frac{b}{c}\right] = \frac{[b]}{[c]} = \frac{[b]}{T^{-1}} = \underbrace{[b] \cdot T}_{\text{oltava } L} \Rightarrow \underline{\underline{[b] = \frac{L}{T}}}.$$

Trinity ja Taylor

Ydinräjähdyksen energia E ; $[E] = [J] = \left[\frac{kgm^2}{s^2}\right] = \frac{ML^2}{T^2}$

Oleellisia suureita:

tulipallon säde r ; $[r] = L$

aika t ; $[t] = T$

ilmantiheys ρ ; $[\rho] = M/L^3$.

Yleisesti $E = f_1(r, \rho, t)$; f_1 tuntematon funktio

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$, massa M esiintyy oikealla puolella vain ilmantiheydessä ρ

$\Rightarrow$ oltava

$$f_1(r, \rho, t) = \rho \cdot \underbrace{f_2(r,t)}_{\text{jokin uusi tuntematon funktio}}$$

$\Rightarrow$

$$E = \rho \cdot f_2(r,t)$$

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$, aika ainoastaan muuttujassa t oikealla puolella

$$\Rightarrow \quad f_2(r,t) = \frac{1}{t^2} \cdot \underbrace{f_3(r)}_{\text{taas uusi tuntematon funktio}}$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\rho}{t^2} \cdot \underbrace{f_3(r)}_{r \text{ ei dimensioton}} \Rightarrow f_3 \text{ oltava potenssifunktio}$$

$$\Rightarrow f_3(r) = C \cdot r^{\alpha}$$

α: jokin potenssi; C: dimensioton vakio

$$[E] = \underbrace{\left[\frac{\rho}{t^2} C \cdot r^{\alpha}\right]}_{\frac{\cancel{M}}{L^3} \cdot \frac{1}{\cancel{T^2}} \cdot L^{\alpha}}$$

$$\frac{\cancel{M}L^2}{\cancel{T^2}} = \frac{\cancel{M}}{L^3} \cdot \frac{1}{\cancel{T^2}} \cdot L^{\alpha} \Rightarrow L^2 = L^{\alpha - 3} \Rightarrow \alpha = 5.$$

$$\Rightarrow \quad E = C \cdot \frac{r^5 \rho}{t^2}$$

Taylor arvioi : $C \approx 1$

Kuvasta

$t = \cancel{0.016\,s}$ $0.025\,s$

$r = \cancel{100\,m}$ $130\,m$

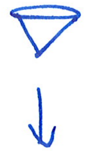
$\rho = 1.1\,kg/m^3$

$\rightarrow E \approx \cancel{4 \cdot 10^{13}\,J} \approx \cancel{10\,kT\,(TNT)}$ 16 kT(TNT)

$6{,}5 \cdot 10^{13}\,J$

Terminaalinopeus Marsissa?

paperikartio



Oleelliset suureet:

- V_T ← haluttu terminaalinopeus
- g, putoamiskiihtyvyys
- m, kartion massa
- ρ, ilmakehän tiheys
- d, kartion halkaisija

Dimensiot:

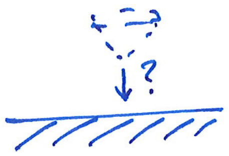
$[V_T] = L/T$

$[g] = L/T^2$

$[m] = M$

$[\rho] = M/L^3$

$[d] = L$.



MARS

Eli tehtävänä ratkaista:

$$V_T = f_1(g, m, \rho, d)$$ ← mielivaltainen neljän muuttujan funktio!

Ilman dimensioanalyyttistä tarkastelua olisi funktion $f_1(g, m, \rho, d)$ kokeellinen määritys (taulukointi) todella vaikeaa:

"yksiulotteisen funktion taulukointi" ⟶ 1 sivu

"kaksiulotteisen ——"—— " ⟶ 1 kirja

"kolmiulotteisen ——"—— " ⟶ 1 kirjahylly

"neliulotteisen ——"—— " ⟶ 1 kirjasto!

Lisäksi joitakin suureita vaikea varioida: g, ρ?

Katsotaan miten dimensioanalyysi auttaa!

aikadimensio T vain putoamiskiihtyvyydessä g

$$v_T = f_1(g, m, \rho, d)$$

dimensio $\frac{L}{T}$

mielivaltainen funktio

oltava:

aikadimensio $\frac{1}{T}$

$$f_1(g, m, \rho, d) = \sqrt{g}\, f_2(m, \rho, d)$$

jälleen mielivaltainen funktio mutta muuttujia enää kolme!

massan dimensio sekä m:ssä että ρ:ssa

$$\Rightarrow \quad v_T = \sqrt{g}\, f_2(m, \rho, d)$$

ei massan dimensiota

massojen pitää kumoutua funktiossa f_2

$\Rightarrow$ m ja ρ esiintyvät parina, esim. $\frac{\rho}{m}$.

$$\Rightarrow \quad v_T = \underbrace{\sqrt{g}}_{\text{pituus } L^{1/2}}\, \underbrace{f_3\Big(\overbrace{\tfrac{\rho}{m}}^{L^{-3}}, \overbrace{d}^{L}\Big)}_{\text{oltava pituuden dimensio } L^{1/2}}$$

pituuden dimensio L

monta eri tapaa, esim.

$$f_3\left(\frac{\rho}{m}, d\right) = \sqrt{d}\, f_4\Big(\underbrace{\frac{\rho}{m} d^3}_{\text{dimensioton}}\Big)$$

tai

$$f_3\left(\frac{\rho}{m}, d\right) = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{1/6} \cdot f_5\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)$$

tai moni muu.

kaikki käy sillä sopivilla funktioiden f_4, f_5, ... valinnoilla voidaan eri vaihtoehdot osoittaa samoiksi.

Valitaan esimerkiksi:

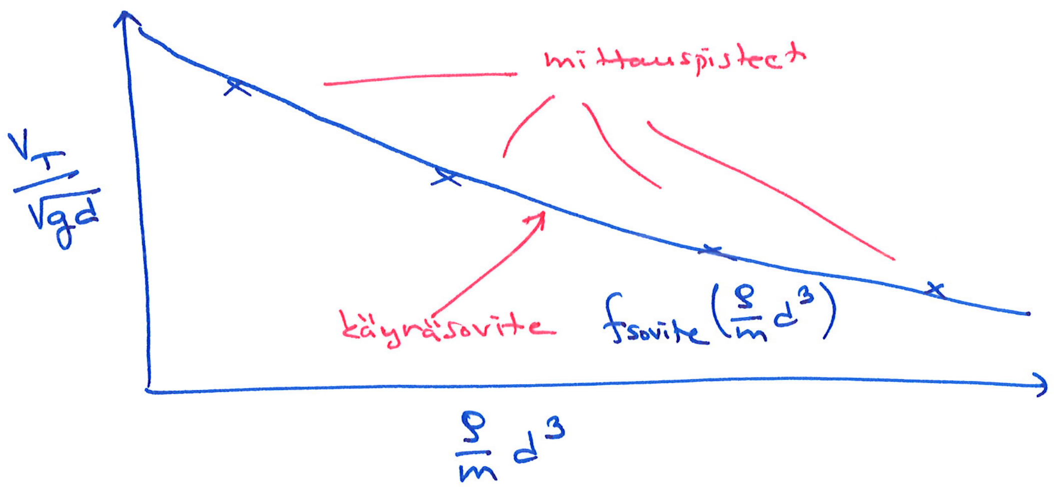
$$\underline{\underline{v_T = \sqrt{gd}\, f_4\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)}}$$

yhden muuttujan $\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)$ funktio!

Mitä olemme saavuttaneet?

Alkuperäinen neljän muuttujan mielivaltainen funktio on nyt yhden muuttujan funktio!

Tekemällä sarja mittauksia jossa varioidaan muuttujaa $\frac{\rho}{m} d^3$ (esimerkiksi varioimalla massaa) voidaan päätellä kaikki funktiosta $V_T(g, m, \rho, d)$!



$$\Rightarrow \quad V_T(g, m, \rho, d) = \sqrt{gd}\, f_{sovite}\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)$$