Muutama sana Buckinghamin π-teoreemasta

Englanninkielisestä wikipediasta löytyy aika hyvä Buckinghamin π-teoreeman johto, mutta tässä muutama hieman täydentävä pointti ja lisäksi selitys miten wikin ajatukset liittyvät kurssilla esiteltyyn käytännön menetelmään.

Tarkastellaan dimensioanalyyttistä ongelmaa, jossa on toisistaan riippumattomat muuttuja $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ja joissa esiintyy fundamentaalit dimensiot $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Esimerkiksi syvän meren aaltojen nopeuden määräävät muuttujat olivat nopeus $q_1 = v$, aallonpituus $q_2 = \lambda$ ja putoamiskiihtyvyys $q_3 = g$. Vastaavat dimensiot olivat pituus $d_1 = L$ ja aika $d_2 = t$. Nähdään siis, että muuttujia oli kolme ($n = 3$) ja dimensioita kaksi ($k = 2$).

Muuttujia voidaan yhdistellä tulomuodossa, jolloin saadaan uusia muuttujia

$$Q = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_n^{\alpha_n}. \tag{1}$$

Tämä uusi muuttuja Q voidaan samaistaa vektorin $(\alpha_1, \alpha_2, ldots, \alpha_n)$ kanssa. Voimme siis ajatella, että muuttujien joukko $\{q_i\}$ toimii kantavektoreina, jotka virittävät muuttujien vektoriavaruuden $\mathcal{M}$. Kuvaus vektoriavaruutena on mielekäs, koska yo. tapa yhdistellä muuttujia antaa meille mahdollisuuden määritellä vektorien $(\alpha_1, \alpha_2, ldots, \alpha_n)$ yhteenlaskun sekä skalaarilla kertomisen. Vektorien yhteenlasku olisi tavanomaiseen tapaan

$$(\alpha_1, \alpha_2, ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ldots, \alpha_n + \beta_n), \tag{2}$$

joka takaisin varsinaisiin muuttujiin kuvattaessa on

$$q_1^{\alpha_1+\beta_1} q_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots q_n^{\alpha_n+\beta_n}. \tag{3}$$

Näemme siis, että muuttujien kertolasku vastaa vektorien yhteenlaskua, ja vektorien kertominen skalaarilla tulee vastaamaan muuttujien korottamista potenssiin.

Riippumattomia muuttujia oli n kappaletta, joten ne virittävät n-ulotteisen vektoriavaruuden. Vastaava käsittely dimensioille $d_1, d_2, \ldots, d_k$ samaistaa dimensiot k-ulotteisen dimensoiden vektoriavaruuden $\mathcal{D}$ kantavektoreina.

Se miten kukin muuttuja q_i rakentuu eri dimensioista d_l (esim. nopeuden $q_1 = v$ dimensio on $L/t = d_1/d_2$, määrittäää meille lineaarikuvauksen muuttujien vektoriavaruudesta $\mathcal{M}$ dimensioiden vektoriavaruuteen $\mathcal{D}$

$$V : \mathcal{M} \to \mathcal{D} : Q \to VQ, \tag{4}$$

missä V on siis lineaarikuvaus ja joka voidaan esittää myös matriisimuodossa.

Oleellista tässä kaikessa on nyt se, että vektoriavaruuksilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{D}$ on eri dimensio. Koska muuttujien vektoriavaruuden riippumattomia kantavektoreita on n kappaletta, on ko. avaruuden dimensio n, kun taas dimensioiden vektoriavaruuden dimensio on k. Koska dimensiot rakentuvat muuttujissa esiintyvistä dimensioista, on selvää, että dimensioavaruuden dimensio on aina pienempi tai enintään yhtä suuri kuin muuttuja-avaruuden dimensio, eli $k \leq n$. Oletetaan, että $k < n$.

Nyt muuttuja-avaruus on 'suurempi' kuin dimensioavaruus. Tämä aiheuttaa sen, että suuri osa muuttuja-avaruuden vektoreista (muuttujista) kuvautuu nollavektoriksi dimensioavaruudessa. Tätä kutsutaan wikipediassa rank-nullity-teoreemaksi.

Esimerkki: Tarkastellaan lineaarikuvausta kolmiulotteisesta avaruudesta $\mathcal{M}$ kaksiulotteiseen avaruuteen $\mathcal{D}$ (eli $n = 3$ ja $k = 2$). . Nyt vektoriavaruus $\mathcal{D}$ saadaan viritettyä joillakin kahdella kantavektorilla (tässä on vapaus valita ne miltei miten vain). Näitä kantavektoreita vastaavat jotkin lähtöavaruuden $\mathcal{M}$ kaksi vektoria. Nämä lähtöavaruuden kaksi vektoria puolestaan virittää kaksiulotteisen aliavaruuden $\mathcal{M}'$ lähtöavaruuteen $\mathcal{M}$, ja kaikki tämän kaksiulotteisen aliavaruuden vektorit kuvautuvat lineaarikuvauksessa kohdeavaruuteen $\mathcal{D}$, täyttäen koko avaruuden $\mathcal{D}$. Nyt meille jäi kuitenkin paljon vektoreita lähtöavaruuteen $\mathcal{M}$, jotka eivät kuuluneet ko. kaksiulotteiseen aliavaruuteen $\mathcal{M}'$. Nämä vektorit kuvautuvat kaikki nollavektoriksi. Tämä on helppoa nähdä, jos vektori $\mathbf{v}$ ei kuvautuisi joksikin muuksi kuin nollavektoriksi, olisi se viritettävissä kohdeavaruuden $\mathcal{D}$ kantavektoreilla, jotka puolestaan ovat kuvia joistakin vektoreista aliavaruudesta $\mathcal{M}'$. Tässä on ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa.

Mitä siis opimme? Mikäli $n > k$, on muuttujien vektoriavaruudessa paljon vektoreita, jotka kuvautuvat nollavektoriksi dimensioiden vektoriavaruudessa. Dimensoiden vektoriavaruuden nollavektori vastaa varsinaisissa dimensioissa jotakin, jonka dimensio on

$$d_1^0 d_2^0 \dots d_k^0 = 1, \tag{5}$$

eli kyseessä on *dimensioton muuttuja*. Rank-nullity teoreema kertoo, että tällaisia dimensiottomia muuttujia (eli lineaarikuvauksen V kernelin, eli ytimen dimensio) on $n - k$ kappaletta.

Eli, jos meillä on n muuttujaa ja k dimensiota, niin voimme kirjoittaa alkuperäisen ongelman $n - k$:n dimensiottoman muuttujan, sekä k:n dimensiollisen muuttujan avulla. Olkoon meidän alkuperäinen dimensioanalyyttinen ongelmamme

$$F(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \tag{6}$$

jonka olen nyt kirjoittanut muodossa, jossa etsitään nollakohtaa. Jos ongelma on jotakin muuta muotoa, niin se voidaan helposti uudelleen muotoilla yo. tavalla.

Tämä voidaan siis uudelleen kirjoittaa jollakin muuttujien vaihdolla muodossa

$$F(k_1, k_2, \dots, k_{n-k}; p_1, p_2, \dots, p_k) = 0, \tag{7}$$

missä muuttujat k_i ovat dimensiottomia (ja niitä on siis $n - k$ kappaletta) ja muuttujat p_j ovat jäljelle jääneet dimensiolliset muuttujat (joita on siis loput k kappaletta). Muuttujien määrä ei siis ole vielä vaihtunut miksikään. Huomaa, että yo. dimensiottomat muuttujat ovat nimenomaan ne muuttujat jotka me saamme ratkaistessamme dimensioanalyyttistä ongelmaa ja dimensiolliset muuttujat ovat ne meidän käyttämät *mittakaavat*.

Nyt tulee varsinainen pihvi: fysikaaliset lait eivät voi riippua mittakaavoista tai siis käytetyistä yksiköistä. Tällöin yo. funktio ei voi riippua muuttujista p_j vaan jäljelle jää vain

$$F(k_1, k_2, \dots, k_{n-k}) = 0. \tag{8}$$