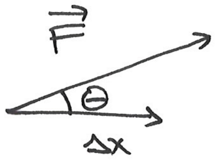
Työ ja konservatiiviset sekä epäkonservatiiviset voimat

Lukion fysiikasta:

Voiman $\vec{F}$ siirtymässä $\Delta\vec{x}$ tekemä työ on

$$W = F\Delta x \cdot \cos\theta$$

missä θ on voiman $\vec{F}$ ja siirtymän $\Delta\vec{x}$ välinen kulma.



Erityisesti

jos $\theta = 0° \Rightarrow W = F\cdot\Delta x$

jos $\theta = 90° \Rightarrow W = 0.$

jos $\theta = 180° \Rightarrow W = -F\cdot\Delta x.$

Vektoreille: $W = \vec{F}\bullet\Delta\vec{x}$ ← pistetulo!

|| siirtymällä on suuruus & suunta → vektorisuure.

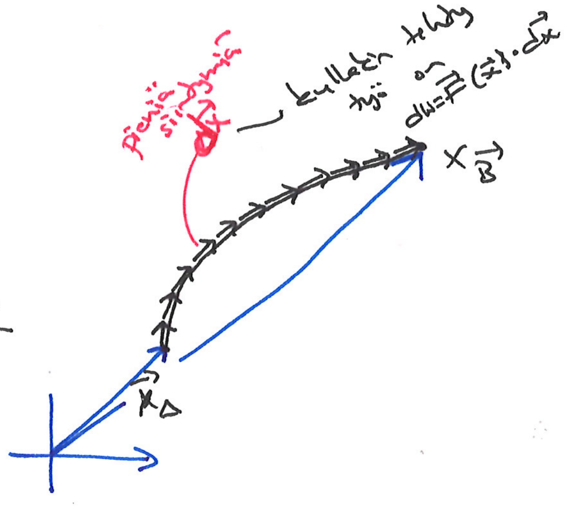
Yo. pätee jos voima on vakio (ei riipu paikasta).
Yleisemmin tämä voidaan olettaa vain hyvin pienille siirtymille $d\vec{x}$

$$dW = \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

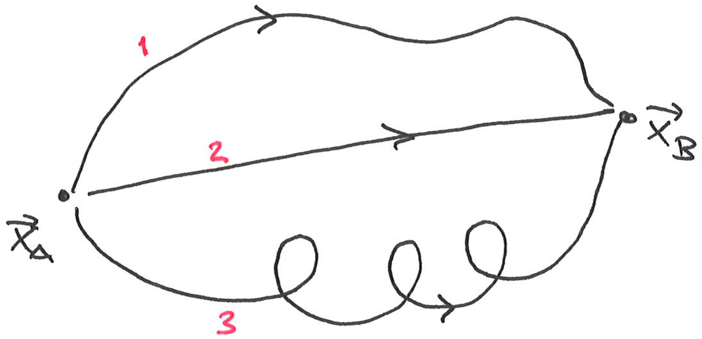
paikan funktio

Pitkällä siirtymällä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ tehty työ saadaan pilkkomalla siirtymä pieniin paloihin ja summaamalla ts. integroimalla

$$W_{AB} = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} dW = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$



Mahdollisia reittejä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ on monia!
eli polkuja



Kullekin reitille (polulle) voidaan laskea voiman $\vec{F}(\vec{x})$ tekemä työ

$$W_1 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 1}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

$$W_2 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 2}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

jne...

Jos tehty työ ei riipu reitistä (polusta)
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on <u>konservatiivinen</u>. (esim. gravitaatio, staattiset sähkökentät)

Jos tehty työ riippuu reitin valinnasta
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on <u>epäkonservatiivinen</u> (esim. kitkavoimat)

Potentiaalienergia

Konservatiiviselle voimalle (tai voimakentälle) voidaan määritellä paikasta $\vec{r}$ riippuva potentiaali $V(\vec{r})$ tai potentiaalienergia $U(\vec{r})$:

- valitse joku piste $\vec{r}_A$ "nollatasoksi" $\Rightarrow U(\vec{r}_A) = 0$.
- pisteen $\vec{r}$ potentiaalienergia on siirtymälle $\vec{r}_A \longrightarrow \vec{r}$ voimaa vastaan tehty työ:

$$U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_A \to \vec{r}} = \boxed{-\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = U(\vec{r})}$$

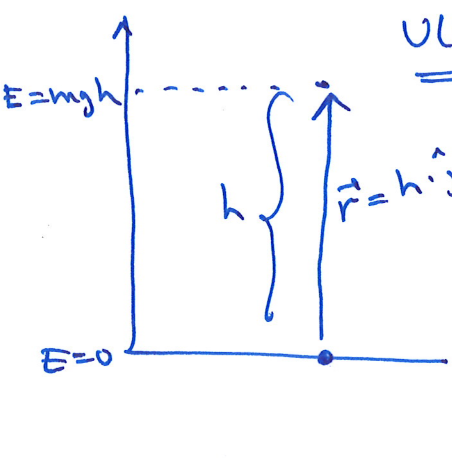
- voimaa $\vec{F}$ vastaan tehty työ W "varastoituu" potentiaalienergiaksi

Huomioita:

- $U(\vec{r})$ ei riipu polusta $\rightarrow$ vain yhden paikan $\vec{r}$ funktio.
- jos $\vec{r} = \vec{r}_A \rightarrow U(\vec{r}) = 0$, eli suljetulle polulle tehty työ $= 0$.

Esim. Gravitaatiopotentiaalienergia (pienille etäisyyksille)

$$\vec{G} = -mg\hat{j}$$



$$\underline{\underline{U(h)}} = -\int_0^h \underbrace{\vec{G}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}_{-mg\,dx} = -\int_0^h (-mg)\,dx$$

$$= \underbrace{-(-mg)}_{mg} \underbrace{\int_0^h dx}_{h} = \underline{\underline{mgh}}.$$

Systeemi, ympäristö ja energian säilyminen

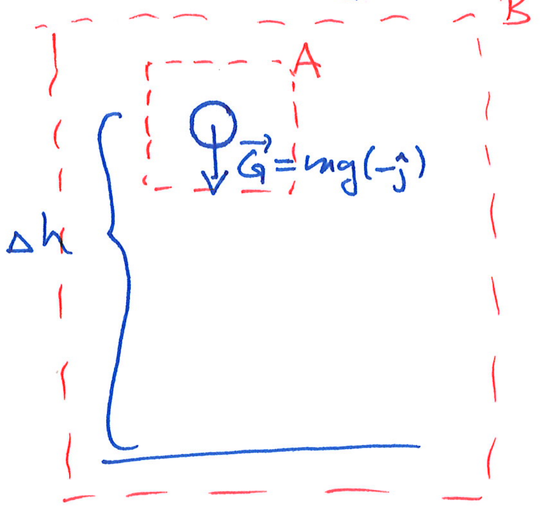
Eri systeemin valintoja:

Putoava pallo: tekeekö maapallo (n gravitaatiokenttä) työtä?

pallo
- kyllä: gravitaatiovoima $G = mg \rightarrow$ työ $W = mg\Delta h$.

pallo + maapallo
- ei: potentiaalienergia $mg\Delta h$ muuttuu kineettiseksi energiaksi mutta kokonaisenergia säilyy.

Systeemi & ympäristö



Systeemi A:

$\vec{G}$ ulkoinen voima
$\Rightarrow$ tekee työtä systeemiin
$\Rightarrow$ systeemin energia kasvaa

$E_A = K =$ kineettinen energia

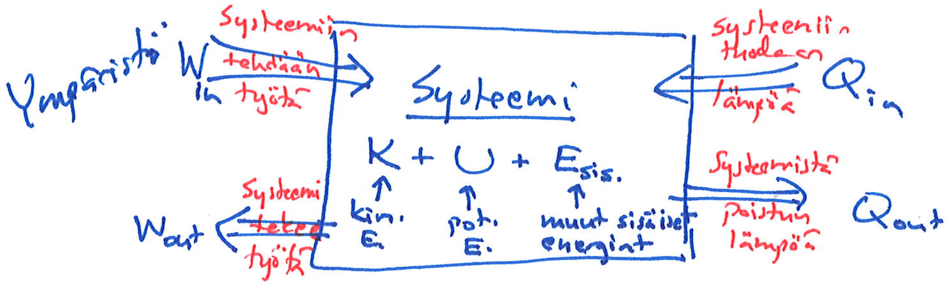
Systeemi B:

ei ulkoisia voimia
$\rightarrow$ energia säilyy.
$\Rightarrow$ gravitaatiovoima sisäinen
$\Rightarrow$ gravitaatiopotentiaalienergia

$\Rightarrow$ $E_B = K + U$

kin. energia, potentiaali-energia

Yleisemmin

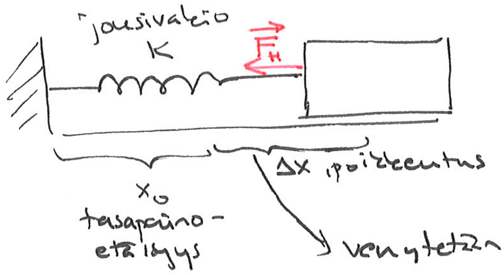


Voi lisätä muitakin energiamuotoja: säteily, massa, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ...

- $U =$ kaikki sisäiset konservatiiviset energiat $E_{sis} =$ kaikki muut

ELASTISUUSTEORIAA

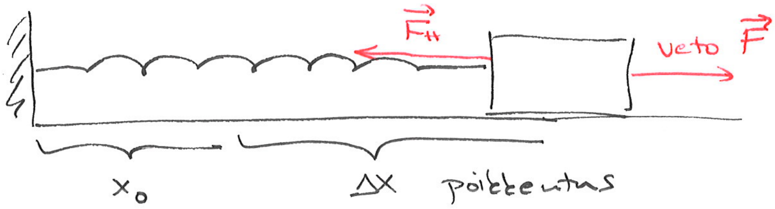
Jousen venytys & Hooken laki

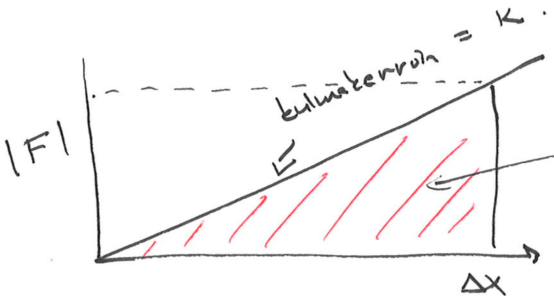


Hooken laki

$$F_H = -k \cdot \Delta x$$

poikkeutus tasapainotilasta





pinta-ala venytyksessä tehtävä työ

$$W = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(k \cdot \Delta x)}_{\text{korkeus}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{leveys}} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 .$$

kolmion pinta-ala

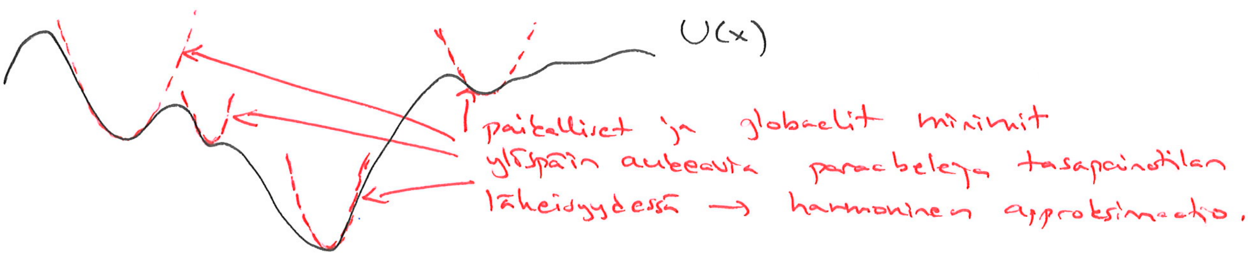
Venytyksen vaatima työ/energia varastoituu jousen potentiaalienergiaksi.

Konservatiivinen voimakenttä

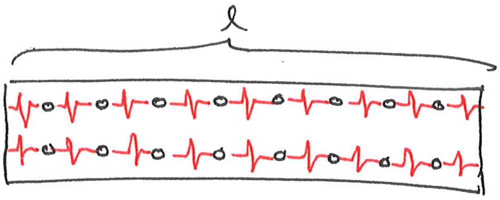
$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2} k x^2}$$

"harmoninen voimakenttä"

(Lähes) mielivaltaisen konservatiivisen voimakentän potentiaalienergia tasapainotilan läheisyydessä on harmoninen:

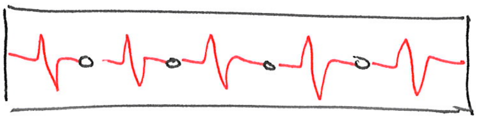


Palkin jousimalli



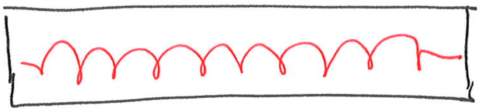
Kappale (palkki) koostuu monesta toisiinsa kytkeytyneistä molekyyleistä. Molekyylien välistä vuorovaikutusta voidaan kuvata yksinkertaisilla jousilla.

Jos yhden "alkeisjousen" jousivakio on k_0 niin

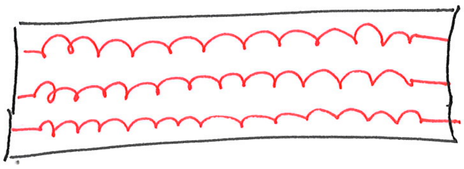


N peräkkäistä alkeisjousta k_0

vastaa

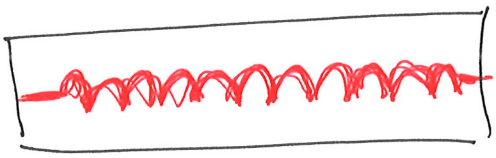


yhtä ekvivalenttia jousta, jonka jousivakio $k_1 = k_0/N$.



M rinnakkaista jousta k_1

vastaa



yhtä ekvivalenttia jousta $K = M \cdot k_1$.

⇒ Palkin "jousivakio"

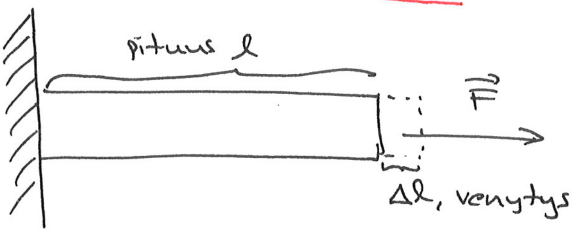
$$\boxed{K = E \cdot \frac{A}{\ell}}$$

poikkipinta-ala → verrannollinen rinnakkaisten jousten määrään M.

palkin pituus → verrannollinen peräkkäisten jousten määrään N.

jokin materiaalivakio (Youngin moduli)

Palkin venytys



Mallinnetaan <u>elastisella</u> venytyksellä

venymä eli pituuden muutos

Hooken laki

$$\boxed{F = +k \cdot \Delta l}$$

venyttävä voima

"jousivakio"

tarkastellaan vain suuruuksia
⇒ kaikki suureet nyt positiivisia.

jousimalli:

$$\boxed{k = E \cdot \frac{A}{l}}$$

poikkipinta-ala

palkin jousivakio

pituus

materiaalin ominainen kimmomoduli (Youngin moduli)

⇒

$$F = +E \cdot \frac{A}{l} \cdot \Delta l \quad \Big| : A$$

⇒

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{jännitys} \; =: \sigma} = +E \cdot \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\text{suhteellinen venymä} \; =: \varepsilon}$$

⇒

$$\sigma = +E \cdot \varepsilon$$

Eli

$$\sigma = E\varepsilon$$

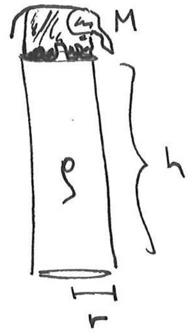
jännitys

Youngin moduli

suhteellinen venymä

Keskeistä termistöä

Esimerkki



Mikä oltava betonipylvään säde jotta pylväs kantaisi norsun?

Korkeus $h = 10\,m$

Betonin tiheys $\rho \simeq 3000\ kg/m^3$

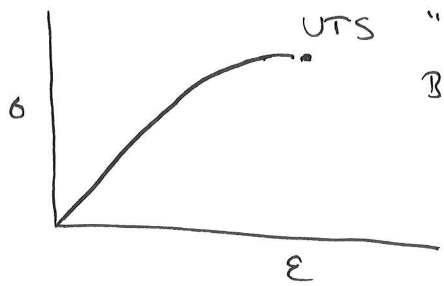
Norsun massa $M \approx 5000\,kg$

Missä jännitys (puristus) suurin? Pohjalla.

Voima $F = M \cdot g + \underbrace{V \cdot \rho}_{\text{pylvään massa}} \cdot g$, $V = \underset{\pi r^2}{\underset{\parallel}{A}} \cdot h$

$\Rightarrow$ jännitys $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{M \cdot g + V \cdot \rho \cdot g}{A} = \dfrac{Mg}{\underset{\pi r^2}{A}} + \rho h g.$

Milloin murtuu?



"Ultimate tensile strength" σ_{crit}.

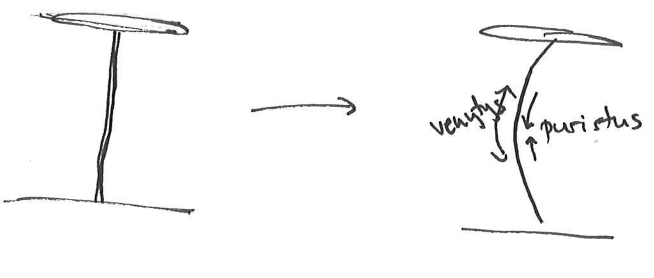
Betonille $\sigma_{crit} \approx 20\,MPa$ puristuksessa

$\Rightarrow$ kriittinen (minimi) säde r_{crit} kun

$$\sigma = \sigma_{crit} = \frac{Mg}{\pi r_{crit}^2} + \rho h g$$

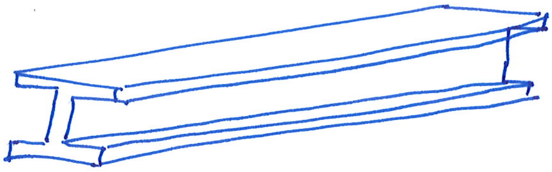
$$\Rightarrow \quad r_{crit} = \sqrt{\frac{Mg/\pi}{\sigma_{crit} - \rho h g}} \approx \sqrt{\frac{\frac{5000\,kg \cdot 10\,m/s^2}{\pi}}{20\,MPa - \underbrace{3000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 10\,m \cdot 10\,m/s^2}_{3 \cdot 10^5\,Pa}}} \approx \underline{\underline{3\,cm}}$$

Todellisuudessa 3cm tuskin riittää:

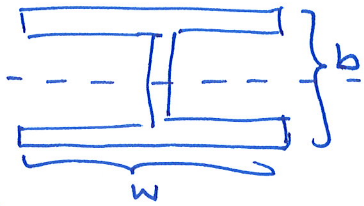


betonin "UTS" venytyksessä paljon puristuskestävyyttä pienempi.

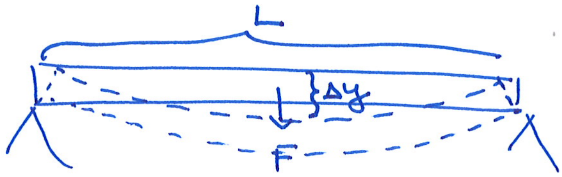
Miksi rakentamisessa käytetään I-palkkeja?

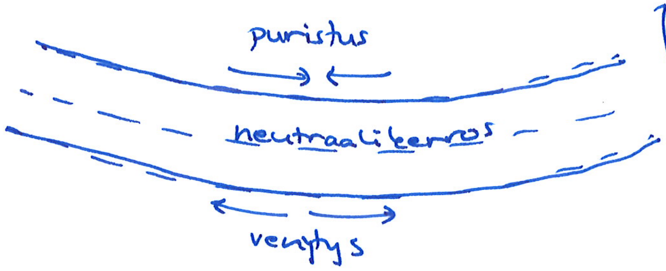


Poikkileikkaus



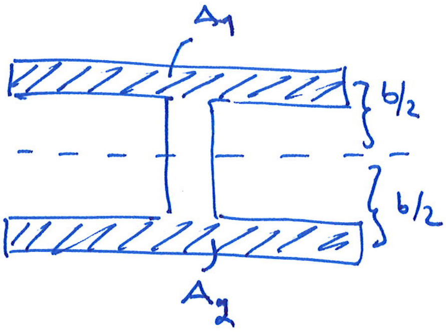
muoto jäykistää palkin taivutusta vastaan





paikallinen muodonmuutoksen suuruus riippuu etäisyydestä neutraalikerroksesta.

Poikkipinta-alan lisäys kaukana neutraalikerroksesta lisää jäykkyyttä.



Suure: Jäyhyysmomentti (= pinta-alan toinen momentti)

$$I = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot A_1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot A_2$$ – I-palkille.

Dimensio

$$[I] = L^4.$$

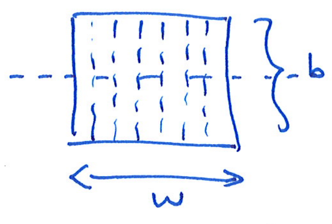
Esim. Neliöpalkille

jossa muotokerroin $\left(=\frac{1}{12}\right)$

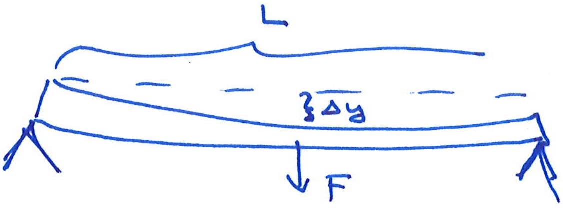
potenssi 3 jotta dimensio L^4.

$$\boxed{I = \alpha \cdot w \cdot b^3}$$

lineaarinen leveydessä
→ voidaan ajatella monena vierekkäin olevana kapeana levynä



Palkin taivutus:



Lienee uskottavaa, että

$$\Delta y = \frac{F \cdot L^m}{E \cdot I}$$

taivuttava voima

L^m: jonkinlainen riippuvuus palkin pituudesta (m ei vielä tiedossa)

Δy: taivutuksen määrä

E: materiaaliparametri (Youngin kimmokerroin)

I: jäyhyysmomentti.

Dimensioanalyysi:

$$[\Delta y] = \left[\frac{F \cdot L^m}{E \cdot I}\right] \quad \Rightarrow \quad L = L^{m-2} \quad \Rightarrow \quad m = 3.$$

$$\underset{L}{\overset{\parallel}{[\Delta y]}} \qquad \frac{\frac{\cancel{M}L}{\cancel{T^2}} \cdot L^m}{\frac{\cancel{M}}{L\cancel{T^2}} \cdot L^4} = \frac{L^{m+1}}{L^3} = L^{m-2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I}.$$

Erityisesti poikkileikkaukseltaan neliöpalkille:

$$\Delta y = \frac{F \cdot L^3}{E \cdot \alpha w b^3} = \frac{F}{E\alpha} \cdot \frac{L^3}{w b^3}$$

Suhteellinen taivutus:

$$\frac{\Delta y}{L} = \frac{F}{E\alpha} \cdot \underbrace{\left(\frac{L^2}{w b^3}\right)}_{}.$$

miten palkin kestävyys skaalautuu pituuden, leveyden ja paksuuden suhteen.