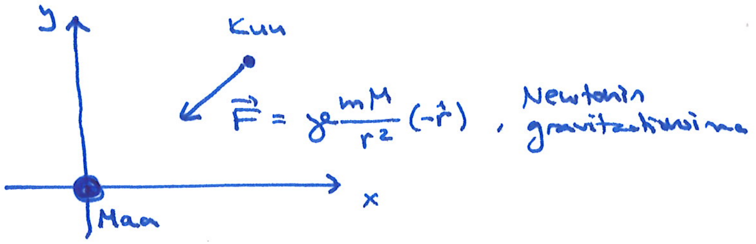
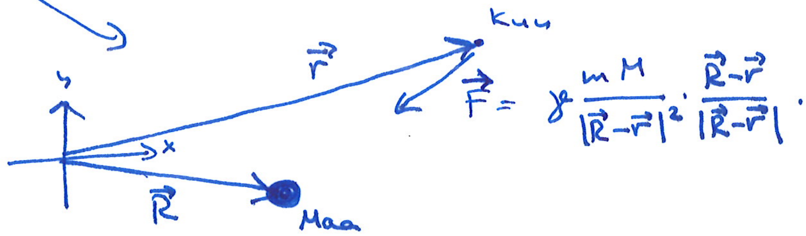
# Vektoreista

- vektorilla "suunta" ja "pituus"
- monet fysiikan suureet vektoreita: voima $\vec{F}$, nopeus $\vec{v}$, kiihtyvyys $\vec{a}$ jne.
- vektorit mahdollistavat <u>koordinaatistoriippumattoman</u> esityksen




- vektorilla voi olla myös dimensio, esim. $\vec{F} = (1N, 2N, 0)$
- erilaisia esitystapoja

$$\vec{F} = (1N, 2N, 0) = \underbrace{1N\,\hat{\imath} + 2N\,\hat{\jmath} + 0 \cdot \hat{k}}_{\text{x, y, z -suuntaiset yksikkövektorit}}$$

- peruslaskutoimitukset: $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$

$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ; vektorin (karteesinen) pituus tai normi

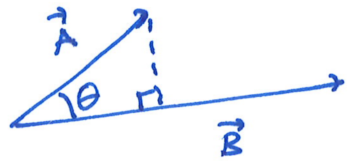
yhteen- ja vähennyslasku $\vec{A} \pm \vec{B} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

skalaarilla kertominen $c \cdot \vec{A} = (ca_x, ca_y, ca_z)$

• kaksi erilaista tuloa:

× pistetulo $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (kerrotaan komponenteittain)

- geometrisesti $\vec{A}$:n projektion $\vec{B}$:lle pituus (kertaa $\vec{B}$:n pituus)



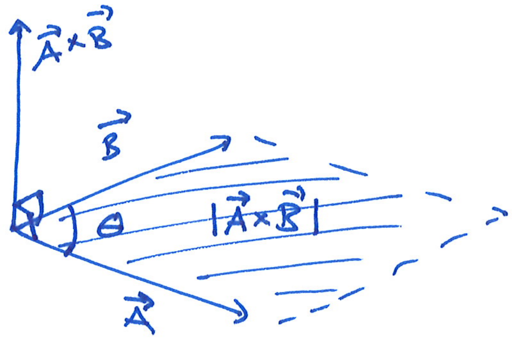

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta$$

- pistetulo on skalaari eli lopputulos on luku
- vektorin normi $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

× ristitulo $\vec{A}\times\vec{B} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}_{} = (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i}$

determinantti, tulee tutuksi matriisilaskennassa. Emme tarvitse tällä kurssilla.

- geometrisesti

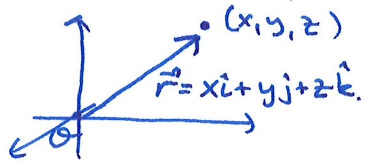



• ristitulo on vektori, joka on kohtisuorassa vektorien $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ virittämälle tasolle

• ristitulovektorin pituus $|\vec{A}\times\vec{B}|$ on $\vec{A}$ ja $\vec{B}$:n virittämän suunnikkaan pinta-ala.

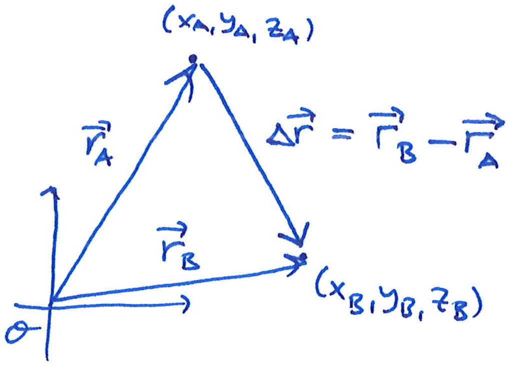
- $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta$

# Paikka, nopeus ja kiihtyvyys




Kolmiulotteinen paikka (x, y, z) voidaan kuvata <u>paikkavektorilla</u> $\vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k$ kun kiinnitämme origon ja koordinaatiston jotenkin.

Siirtymä (displacement) $\Delta \vec r$ on kahden paikkavektorin erotus, eli kuvaa miten yhdestä pisteestä $\vec r_A = x_A\hat i + y_A\hat j + z_A\hat k$ siirrytään toiseen pisteeseen $\vec r_B = x_B\hat i + y_B\hat j + z_B\hat k$




$$\Delta \vec r = \vec r_B - \vec r_A = (x_B - x_A)\hat i + (y_B - y_A)\hat j + (z_B - z_A)\hat k$$

Huomaa: $\Delta \vec r$ ei riipu origon paikasta, paikkavektorit $\vec r_A$ ja $\vec r_B$ sen sijaan ovat koordinaatistoriippuvia.

Jos (kappaleen) paikka riippuu ajasta, kirjoitetaan sen paikkavektori:

$$\vec r(t) = x(t)\hat i + y(t)\hat j + z(t)\hat k.$$

Nopeus (keskimääräinen ~~hetkellinen~~) on

$$\vec v_{av}(t) = \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{\vec r_B - \vec r_A}{\Delta t} = \frac{\text{"siirtymä ajassa } \Delta t\text{"}}{\text{aika } \Delta t}$$

Hetkellinen nopeus on raja-arvo kun $\Delta t \to 0$:

$$\vec v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t}$$

$$= \vec r\,'(t) = D\vec r(t) = \frac{d\vec r(t)}{dt}.$$

Eli nopeus on paikan aikaderivaatta.

Vastaavasti $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

Selvästi nopeus ja kiihtyvyys ovat myös vektoreita:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{v_x(t)}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{v_y(t)}\hat{\jmath} + \underbrace{\frac{dz(t)}{dt}}_{v_z(t)}\hat{k}$$

$$= v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}.$$

ja

$$\vec{a}(t) = \ldots = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{k}$$

$$= a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}.$$

Korkeampiakin paikan aikaderivaattoja on:

$\frac{d^3\vec{r}(t)}{dt^3}$ nykäys (jerk)

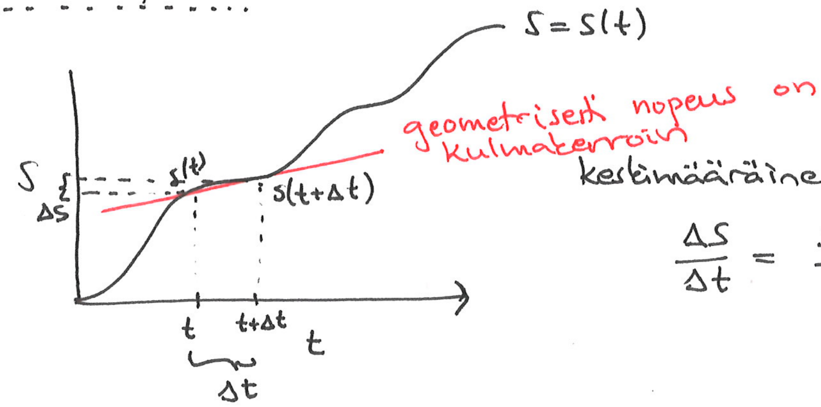
$\frac{d^4\vec{r}(t)}{dt^4}$ napse (snap)

$\frac{d^5\vec{r}(t)}{dt^5}$ — (crackle)

$\frac{d^6\vec{r}(t)}{dt^6}$ — (pop)

# Differentiaali- ja integraalilaskentaa fysiikassa

## Mitä on nopeus?




keskimääräinen nopeus

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

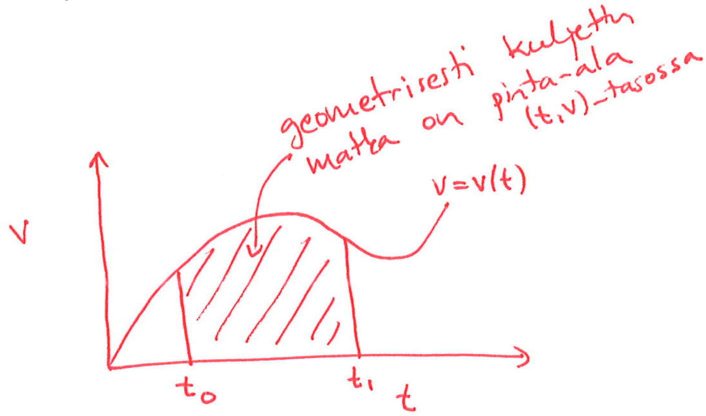
Hetkellinen nopeus $\quad v(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

$$= \boxed{\frac{ds(t)}{dt} = v(t)}$$

Nopeus on paikan 1. aikaderivaatta.

Voimme siis ratkaista (derivoimalla) kappaleen nopeuden jos tiedämme sen paikan ajan funktiona.

## Entäpä ne integraalit?




$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} v(t')\,dt' = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{ds(t')}{dt'}\,dt'}$$

(integraali on "antiderivaatta")

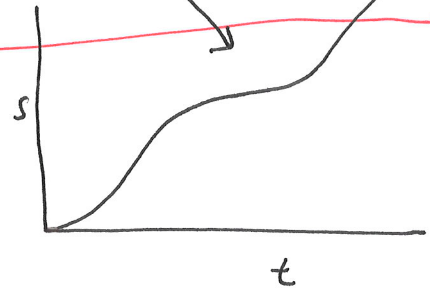
$$\Big/_{t_0}^{t_1} s(t') = s(t_1) - s(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t')\,dt'}$$

Vastaavasti kiihtyvyys:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

geometrisesti 2. derivaatta kuvaa käyrän kaarevuutta $s = s(t)$




ja toisaalta

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,dt'$$

(täällä valittu alkuajanhetkeksi $t_0 = 0$)

ja edelleen

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t')\,dt'$$

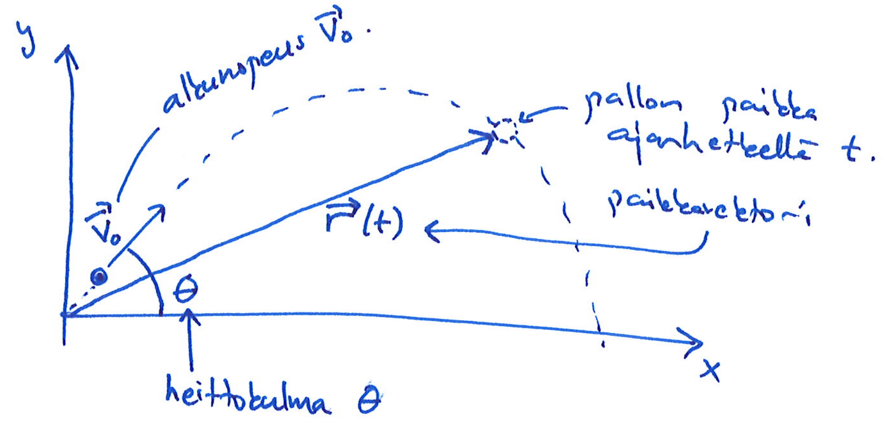
$$= s(0) + \int_0^t \left[v(0) + \int_0^{t'} a(t'')\,dt''\right] dt'$$

$$= s(0) + t \cdot v(0) + \int_0^t \left[\int_0^{t'} a(t'')\,dt''\right] dt'.$$

Näitä EI PIDÄ MUISTAA vaan ymmärtää.

Esimerkki: heittoliike.

Koska meillä ei ole vielä integrointia työkaluna, niin tehdään lasku takaperin.




Unohdetaan ilmanvastus.
Heitetään pallo (maanpinnan tasosta, $y=0$) kulmassa $\theta$.
Alkuvauhti olkoon $v_0$.

Nyt siis alkunopeus $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = v_0 \cos\theta \cdot \hat{\imath} + v_0 \sin\theta \cdot \hat{\jmath}$.

Pallon paikka ajanhetkellä $t$ on (tai voidaan osoittaa että...)

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\theta \cdot t)\,\hat{\imath} + (v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2)\,\hat{\jmath}.$$

Ratkaistaan nopeus ajanhetkellä $t$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 \cos\theta \cdot t)\,\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2)\,\hat{\jmath}$$

$$= \underbrace{v_0 \cos\theta \cdot \hat{\imath}}_{\text{ei riipu ajasta!}} + \underbrace{(v_0 \sin\theta - gt)}_{\text{aivan kuten heitto suoraan ylöspäin!}}\,\hat{\jmath}$$

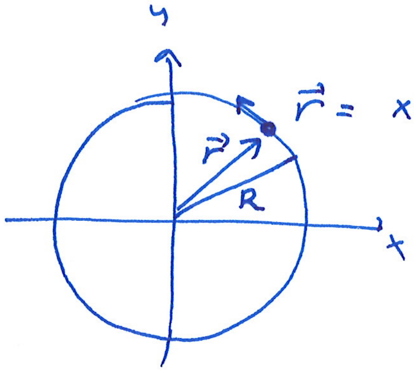
Ja kiihtyvyys:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overbrace{\frac{d}{dt}(v_0 \cos\theta)}^{0}\,\hat{\imath} + \overbrace{\frac{d}{dt}(v_0 \sin\theta - gt)}^{-g}\,\hat{\jmath}$$

$$= -g\hat{\jmath}.$$

Newton II takaperin: $\sum \vec{F} = m\vec{a}(t) = -mg\hat{\jmath}$. Eli kappaleeseen kohdistuu vain painovoima (alaspäin). Hyvältä kuulostaa!

Tärkeä erikoistapaus: tasainen ympyräliike.




$\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$. Tasaisessa ympyräliikkeessä

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$
$$y(t) = R \sin(\omega t)$$

"kulmanopeus" palaamme tähän myöhemmin.

Hetkellinen vauhti:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right|$$

$$= \left|\frac{d}{dt}(R\cos(\omega t))\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(R\sin(\omega t))\hat{\jmath}\right|$$

$$= |\underbrace{-R\omega\sin(\omega t)\hat{\imath} + R\omega\cos(\omega t)\hat{\jmath}}_{\text{hetkellinen nopeus } \vec{v}(t)}|$$

$$= \cancel{(R\omega)}\sqrt{(R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2}$$

$$= R\omega\underbrace{\sqrt{\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2}}_{1} = R\omega = \text{vakio}.$$

$= \text{kiertovauhti} =: v_0$.

Hetkellinen kiihtyvyys:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t)\hat{\imath} - R\omega^2\sin(\omega t)\hat{\jmath}$$

$$= -\omega^2\vec{r}(t).$$

Eli

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)$$

Kiihtyvyyden suuruus:

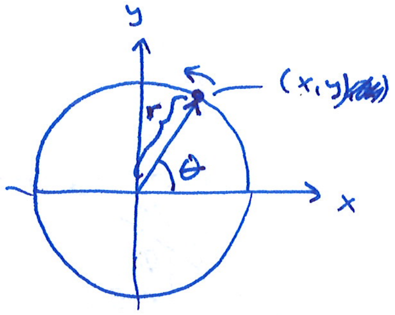
$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}.$$

ja suunta on vastakkainen hetkelliselle paikkavektorille → suunta kohti ympyrän keskipistettä. KESKIHAKUKIIHTYVYYS.

Opetus: nopeudelle kohtisuora kiihtyvyys ei muuta nopeuden suuruutta vaan ainoastaan sen suuntaa.

# Kiertokulma, kulmanopeus ja -kiihtyvyys

Ympyräliikettä jonkin akselin ympäri helpompi kuvata sylinterikoordinaatistossa




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

esitetään paikkaa $(x,y)$ vain säteen ja kulman avulla $(r,\theta)$.

$\theta$ = kiertokulma "theta"

Jos $r$ = vakio niin kiertokulman muuttuessa saadaan ympyrärata. Kiertokulman aikaderivaatta on kulmanopeus

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \text{"omega"}$$

Ja sen aikaderivaatta on kulmakiihtyvyys

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}. \quad \text{"alfa"}.$$

Määritelmiä:
kiertoaika $T = \frac{2\pi}{\omega}$ eli yhteen kierrokseen kuluva aika.
Taajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Tasossa (kahdessa ulottuvuudessa) riittää käsitellä kiertokulmaa ja kulmanopeutta skalaareina mutta kuten normaalikin nopeus myös esim. kulmanopeus on vektorisuure kolmessa ulottuvuudessa.

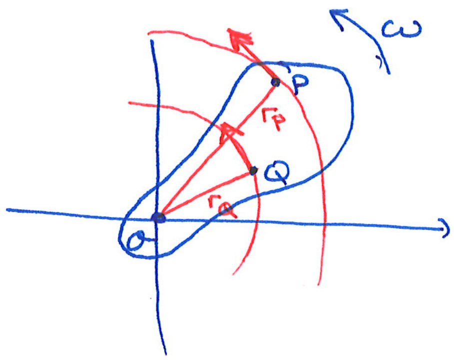
Määritelmä: kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$: suuruus on itse kulmanopeus ja suunta on pyörimisakselin suunta oikean käden ruuvisäännön mukaan.

Vastaavasti kiertokulma $\vec{\theta}$ ja kulmakiihtyvyys $\vec{\alpha}$.

# Jäykän kappaleen dynamiikkaa

Jäykkä kappale on sellainen, jonka muoto ei muutu.

Tarkastellaan jäykkää kappaletta, joka pyörii jonkin akselin O ympäri




Muoto säilyy
⇒ jokainen kappaleen piste (P ja Q) pyörii samalla kulmanopeudella ω.

Mutta tangentiaaliset nopeudet ovat eri suuret

$$\begin{cases} v_P = r_P \cdot \omega \\ v_Q = r_Q \, \omega \end{cases}$$

Kappale voi pyörimisen lisäksi olla etenevässä liikkeessä (kuten tavallinen pistemäinen kappale).

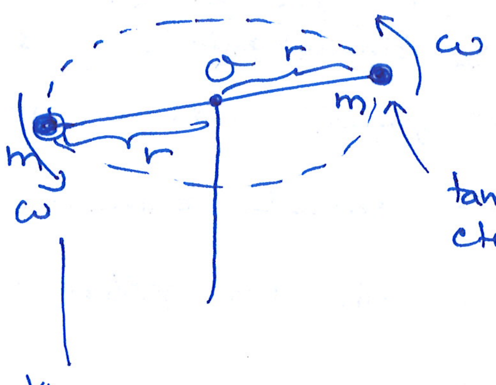
Jäykän kappaleen liike voidaan aina jakaa yhdistelmäksi kolmiulotteista etenevää liikettä ja pyörimisliikettä kolmen kohtisuoran akselin ympäri.

⇒ kuusi vapausastetta.

Yhteys termodynamiikkaan: molekyylin rakenne ja kaasun lämpökapasiteetti.

# Pyörivän (jäykän) kappaleen liike-energia

Kuten etenevän liikkeen liike-energia ($\frac{1}{2}mv^2$) myös pyörimisliikkeeseen liittyy energiaa:




keskipisteensä ympäri pyörivän sauvan päässä massat m.

tangentiaalinen etenemisnopeus $v = r\omega$. $\Rightarrow$ kin. energia $\frac{1}{2}mv^2$
$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

kin. energia myös $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$

sauvan pyörimisen liike-energia

$$2\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(2mr^2)}_{\text{sauvan hitausmomentti } I = 2mr^2}\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

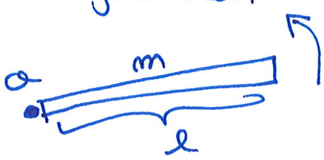
Yleisesti: akselin O ympäri kulmanopeudella ω pyörivän kappaleen pyörimisen liike-energia on

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

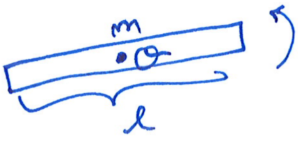
missä hitausmomentti I riippuu kappaleen massasta, muodosta sekä akselin O paikasta.

Muutama kätevä tulos (taulukkokamaa)

homogeeninen tanko




$I = \frac{1}{3}ml^2$

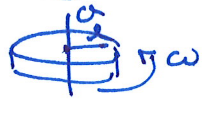



$I = \frac{1}{12}ml^2$

umpinainen kuula


$I = \frac{2}{5}ml^2$

kiekko




$I = \frac{1}{2}ml^2$

# Massan momentit

Erilaisten todennäköisyysjakaumien <u>momentit</u> tulevat aikanaan matikassa tutuiksi mutta fysiikassa on hyvin analoginen käsite:

Kappaleen $\alpha$ <u>massan n:s momentti</u> on

$$\sum_{\alpha} \vec{r}^{\,n} \Delta m \longrightarrow \int_{\alpha} \vec{r}^{\,n} dm = \int_{\alpha} \vec{r}^{\,n} \rho(\vec{r})\, d\vec{r}.$$

Esim. 0:s momentti (tai monopolimomentti)

$$\int \vec{r}^{\,0} dm = \int dm = M = \text{kokonaismassa}$$

~~Tiedostaa~~

1. momentti (tai dipolimomentti)

$$\int \vec{r}\, dm = \int \vec{r} \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = \vec{r}_{MKP} \cdot M$$

massakeskipiste

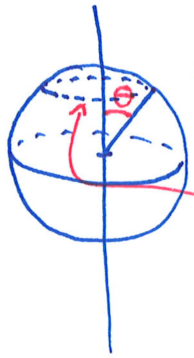
2. momentti (tai kvadrupolimomentti)

$$\int \vec{r}^{\,2} dm = \int \vec{r}^{\,2} \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = I = \text{hitausmomentti}.$$

Sen korkeammilla momenteilla ei ole tuttuja analogioita/merkityksiä mutta esimerkiksi massan kolmas momentti kertoo massajakauman epäsymmetrisyyttä.

Esimerkki:

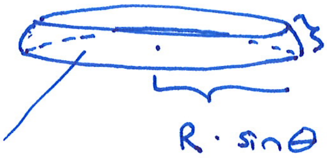
ontton pallon hitausmomentti keskipisteen läpi kulkevan akselin suhteen



säde = R
massa = M

$$I = \int r^2 dm = ?$$

tarkastellaan kiekkoa



$R \cdot d\theta$

$R \cdot \sin\theta$ = kiekon säde = massan etäisyys pyörimisakselista

kiekon pinta-ala

$$dA = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta .$$

kiekon massa

$$dm = \frac{dA}{A} \cdot M = M \cdot \frac{\cancel{2\pi} \cancel{R^2} \sin\theta \, d\theta}{\cancel{4\pi} \cancel{R^2}_{\,2}} = \frac{M}{2} \sin\theta \, d\theta .$$

Pallokuoren hitausmomentti on nyt

$$I = \int_0^\pi \underbrace{(R \sin\theta)^2}_{\text{kiekon säde}} \cdot \underbrace{\frac{M}{2} \sin\theta \, d\theta}_{\text{kiekon massa}} = \frac{MR^2}{2} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta}$$

menee osittaisintegroinnilla, mutta Wolfram alpha: 4/3.

$$= \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3} MR^2 = I}$$

$\approx 0.667$

Vertaa umpinaiseen kuulaan

$$I_{kuula} = \frac{2}{5} MR^2 .$$

$= 0.4$