Pyörimismäärä

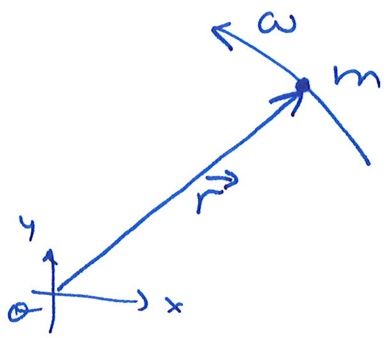
Kokeellisesti havaitaan että ulkoisten voimien puuttuessa suure

$$L = I \cdot \omega \quad \text{säilyy.}$$

L on pyörimismäärä tai kulmaliikemäärä. (vrt. liikemäärä $p = mv$, $L = I \cdot \omega$)

Pyörimismäärän säilymislaki on yksi keskeinen fysiikan säilymislaki.

Jos tarkastellaan pistemäistä kappaletta (massa m)



$$L = \underset{mr^2}{I} \cdot \omega = mr^2\omega$$

$$= r \cdot m \overbrace{r\omega}^{v \text{ (tangentiaalinen nopeus)}}$$

$$= r \cdot \overbrace{mv}^{\text{liikemäärä } p}$$

$$= r \cdot p.$$

Määritelmä:

Pistemäisen kappaleen pyörimismäärä on

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

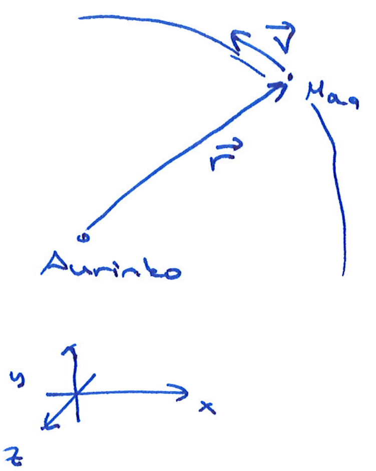
(liikemäärän ensimmäinen momentti)

Ja tästä voidaan johtaa esimerkiksi pyörivän jäykän kappaleen pyörimismäärä

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Esimerkkejä

Maa ja aurinko



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$= m \cdot \underbrace{\vec{r} \times \vec{v}}$$

rata suunnilleen ympyrä

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = r \cdot v \cdot \hat{k}$$

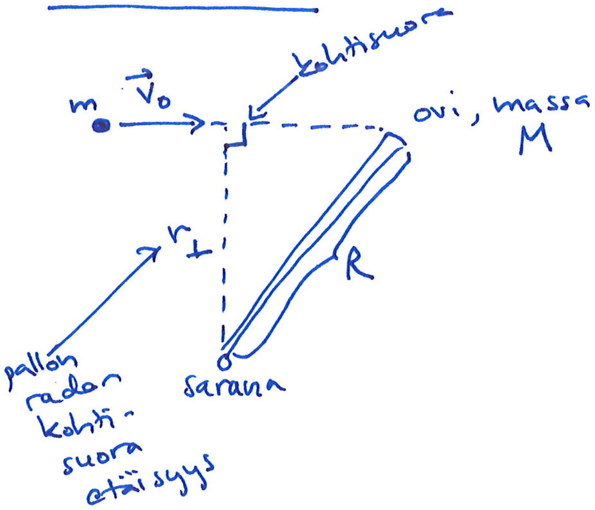
$\uparrow$ $\vec{r} \perp \vec{v}$.

$$= mrv \cdot \hat{k}.$$

tasaisessa ympyräliikkeessä vakio

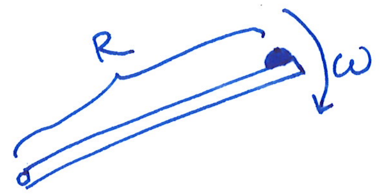
$\longrightarrow$ $\vec{L}$ vakio.

Pallolla oveen



Pallon (ja koko systeemin) pyörimismäärä saranan suhteen alussa

$$\vec{L} = r_\perp \cdot m v_0$$



Lopussa pallo ja ovi kääntyy (pyörii) saranan ympäri.

$\Rightarrow$ pyörimismäärä

$$\vec{L} = \underset{\substack{\parallel \\ \frac{1}{3}MR^2}}{I_{ovi}}\omega + \overbrace{mR^2}^{\text{pallon hitausmomentti}}\omega$$

$$= \left(\frac{1}{3}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

Pm säilyy

$$\Rightarrow r_\perp m v_0 = \left(\frac{1}{3}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{r_\perp m v_0}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)R^2}$$

Vääntömomentti

$\vec{L}$ siis säilyy suljetussa systeemissä (ei ulkoisia voimia)

vaan miten se siis muuttuu?

Ulkoinen voima $\vec{F}$ aiheuttaa vääntömomentin.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{L}}_{\substack{\text{systeemin} \\ \text{kokonaispyörimismäärän} \\ \text{muutosnopeus}}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\substack{\text{paikan} \\ \text{aikaderivaatta} \\ = \text{ nopeus } \vec{v}(t)}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\substack{\text{liikemäärän} \\ \text{aikaderivaatta} \\ = \text{ kokonaisvoima } \vec{F} \\ \text{(Newton II)}}}$$

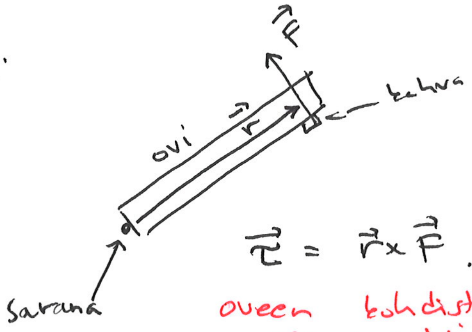
$$= \underbrace{\vec{v}(t) \times \underset{\substack{\shortparallel \\ m\vec{v}}}{\vec{p}}}_{m \cdot \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0\text{, samansuuntaiset vektorit}}} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{\tau}}$$

voiman $\vec{F}$ vääntömomentti

riippuu koordinaatiston valinnasta (palataan tähän myöhemmin)

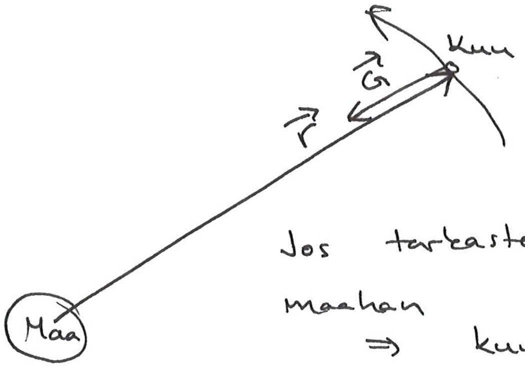
Esim.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

oveen kohdistuva vääntömomentti saranan suhteen.

Esim. Kuu, Maa ja vuorovedet



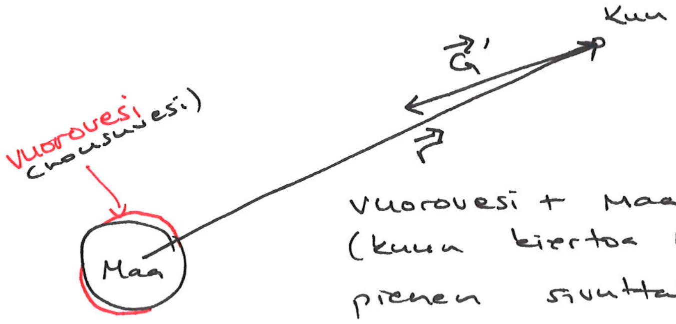
Jos tarkastelukoordinaatisto (origo) kiinnitetty maahan

$\Rightarrow$ kuuhun ei kohdistu vääntömomenttia:

$$\vec{\tau} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{G}}_{|\vec{r}|\cdot|\vec{G}|\cdot\underbrace{\sin\theta}_{0}} = 0. \qquad \theta = \pi$$

$\Rightarrow$ <u>Kuun ratapyörimismäärä säilyy</u>

Toisaalta:



vuorovesi + Maapallon pyöriminen (kuun kiertoa nopeammin) aiheuttaa pienen sivuttaisen komponentin gravitaatiovoimaan

$\Rightarrow$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{G}' \neq 0$

$\Rightarrow$ Kuun pyörimismäärä kasvaa

$\Rightarrow$ Kuun ratanopeus kasvaa

$\Rightarrow$ Kuu loittonee maasta (noin 4cm / vuosi)

Vastaavasti NIII nojalla: (tai pyörimismäärän säilymisen nojalla)

Maapallon pyöriminen hidastuu

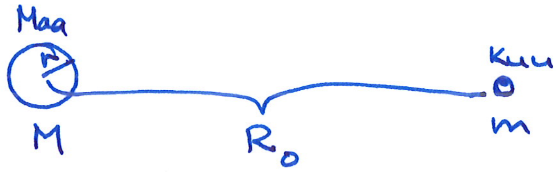
$\Rightarrow$ päivä pitenee

$\longrightarrow$ kunnes kuukausi ja päivä samanpituiset eli kuu paikallaan pyörivään maahan nähden.

Päivän pituus pitkän ajan päästä?

Oletetaan energian säilyminen
- aika karkea arvio
- saadaan yläraja etäisyydelle R
  → alaraja ω:lle
  → yläraja päivän pituudelle.

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2} \\ m = 7{,}35\cdot 10^{22}\ kg \\ M = 5{,}97\cdot 10^{24}\ kg \\ r = 6371\ km \approx 6{,}37\cdot 10^{6}\ m \\ R_o = 384\,000\ km = 3{,}84\cdot 10^{8}\ m \\ \omega_d = 7{,}27\cdot 10^{-5}\ rad/s \\ \omega_m = 2{,}42\cdot 10^{-6}\ rad/s \end{array}\right.$$



Maan hitausmomentti

$$I = \frac{2}{5}Mr^2 \approx 9{,}69\cdot 10^{37}\ kgm^2$$

Pyörimismäärän säilymislaki:

$$\underbrace{L_0 = I\omega_d + mR_o^2\omega_m}_{\text{alussa (nyt)}} = \boxed{\underbrace{I\omega + mR^2\omega}_{\text{kun päivä ja kuukausi yhtä pitkät.}} = L_0}$$

$$L_0 \approx 3{,}33\cdot 10^{34}\ kgm^2\frac{rad}{s}$$

(80% tulee kuun rataliikkeestä, 20% maan spinistä)

Energian säilymislaki:

$$\underbrace{E_0 = -\gamma\frac{mM}{R_o} + \overbrace{\frac{1}{2}I\omega_d^2 + \frac{1}{2}mR_o^2\omega_m^2}}_{\text{energia alussa}} = \boxed{-\gamma\frac{mM}{R} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2}_{\frac{1}{2}L_0\omega} = E_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\gamma\frac{mM}{R_o} \approx -7{,}62\cdot 10^{28}\ J \\ \frac{1}{2}I\omega_d^2 \approx 2{,}56\cdot 10^{29}\ J \\ \frac{1}{2}mR_o^2\omega_m^2 \approx 3{,}17\cdot 10^{28}\ J \end{array}\right|$$

$$E_0 \approx +2{,}12\cdot 10^{29}\ J$$

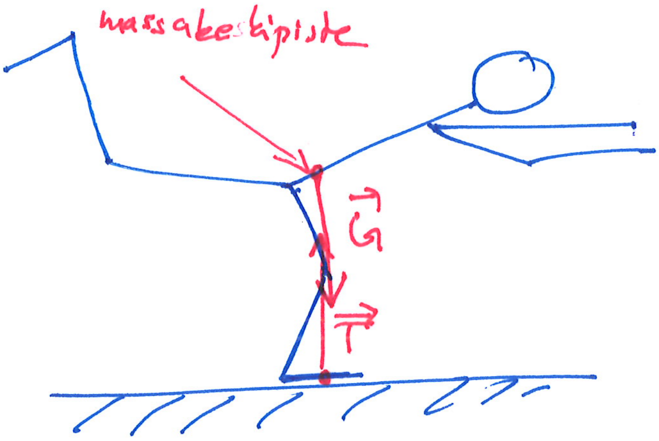
positiivinen!

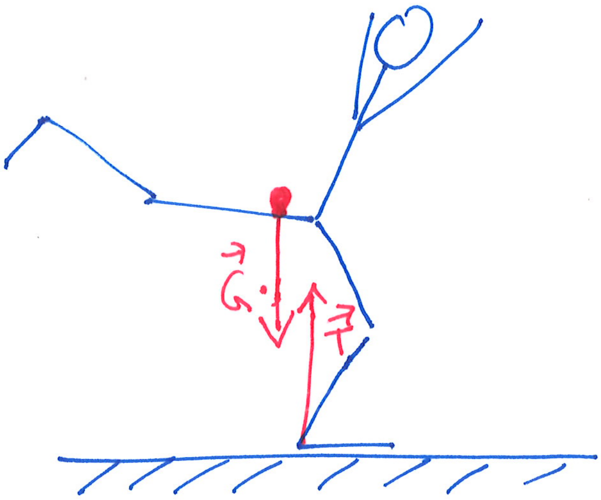
Hmm. Yhtälöparille ei löydy realistista ratkaisua...

Tasapaino

"Kaatuminen on pyörimistä".

Jäykkä kappale tasapainossa jos siihen kohdistuvien voimien summa = 0 (ei massakeskipisteen kiihtyvää liikettä) JA voimien momenttien summa = 0 (ei kulmakiihtyvyyttä).





tukivoima $|\vec{T}| = |\vec{G}|$

→ ei kiihtyvyyttä

ja momentit (esimerkiksi massakeskipisteen suhteen)

$\vec{r} \times \vec{T} = -\vec{r} \times \vec{G} \Rightarrow \sum \vec{\tau} = 0.$

⇒ ei kulmakiihtyvyyttä

⇒ TASAPAINO!

Nyt $|\vec{T}| = |\vec{G}|$

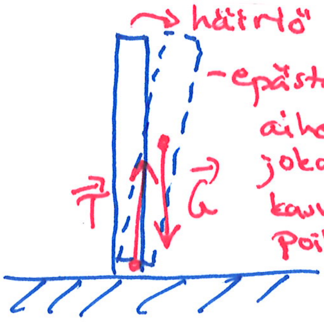
mutta $\vec{r} \times \vec{T} \neq -\vec{r} \times \vec{G}$.

⇒ alkaa pyöriä

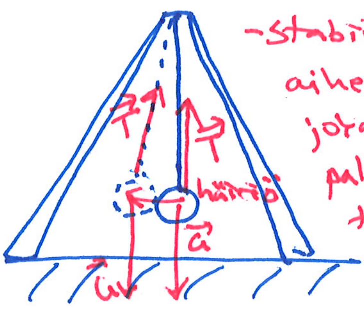
→ KAATUMINEN

Kaatuminen kenties alkaa puhtaalla pyörimisellä mutta jatkuu myös massakeskipisteen kiihtymisellä koska tukivoima ei voi kaatumisen alettua enää kumota painovoimaa.

Tasapaino voi olla stabiili, jos se säilyy myös pieniä häiriöitä vastaan. Tai se voi olla epästabiili jos pienet häiriöt rikkovat sen.

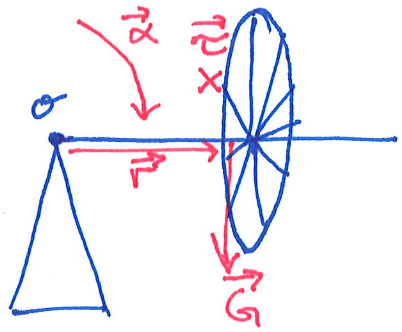


-epästabiili: häiriö aiheuttaa väännön joka pyrkii kasvattamaan poikkeutusta.



-stabiili: häiriö aiheuttaa väännön joka pyrkii palauttamaan tasapainotilaan.

Gyroskooppi



Jos kiekko ei pyöri

→ alussa pyörimismäärä $\vec{L} = 0$.

→ painovoima aiheuttaa vääntömomentin

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{G}$$

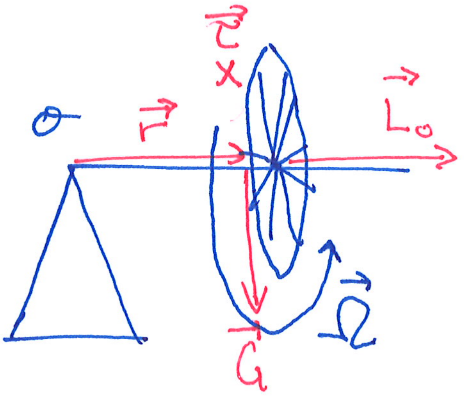
suunta paperin sisään.

→ gyro saa pyörimismäärää $\vec{L}$ vääntömomentin suuntaan

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

→ gyro kaatuu, pyörien tukipisteen O ympäri

Jos kiekko pyöri



→ alussa pyörimismäärä $\vec{L}_0 \neq 0$

→ painovoima aiheuttaa vääntömomentin

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{G}$$

suunta aina kohtisuorassa akselia ja $\vec{L}_0$:aa vastaan (alussa paperin sisään)

→ $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ ja $\vec{\tau} \perp \vec{L}$.

→ $\vec{L}$ alkaa kääntyä mutta sen suuruus ei muutu

Vertaa:
keskihakuvoima
↕
kiertoratalike