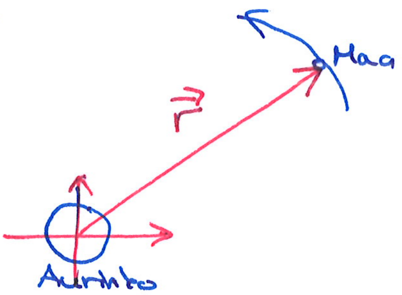
Koordinaatistovalinnat

Systeemin valinnan ohella tärkeä valinta: koordinaatisto.

- origon valinta
- liikkuva koordinaatisto (suhteessa mihin?)
- inertiaali- / epäinertiaalikoordinaatisto
- karteesinen- (xyz), sylinteri-, pallo- yms. -koordinaatistot

Origon valinta:

Asiat näyttävät erilaiselta eri pisteistä tarkasteltuna.
Esim.

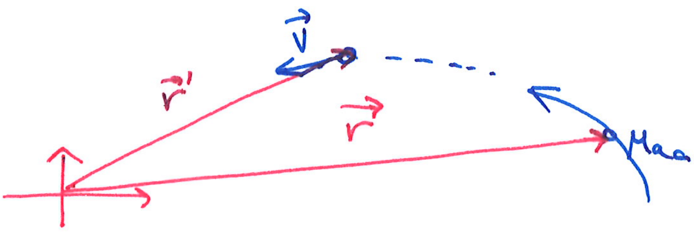


Maa kiertää vakioratanopeudella vakiosäteistä ympyrää.
Edellinen viikko: maapallon ratapyörimismäärä säilyy.

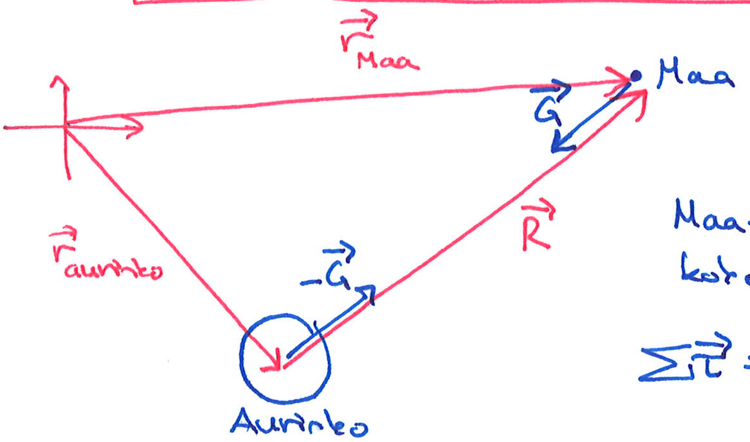
Mutta:

jos tarkastelupiste ("origo") muualla kuin radan keskipisteessä

→ maapallon ratapyörimismäärä muuttuu!



$\boxed{\text{Mutta eikö pyörimismäärän pitänyt säilyä?!}}$



On huomioitava auringon (rata)pyörimismäärä:

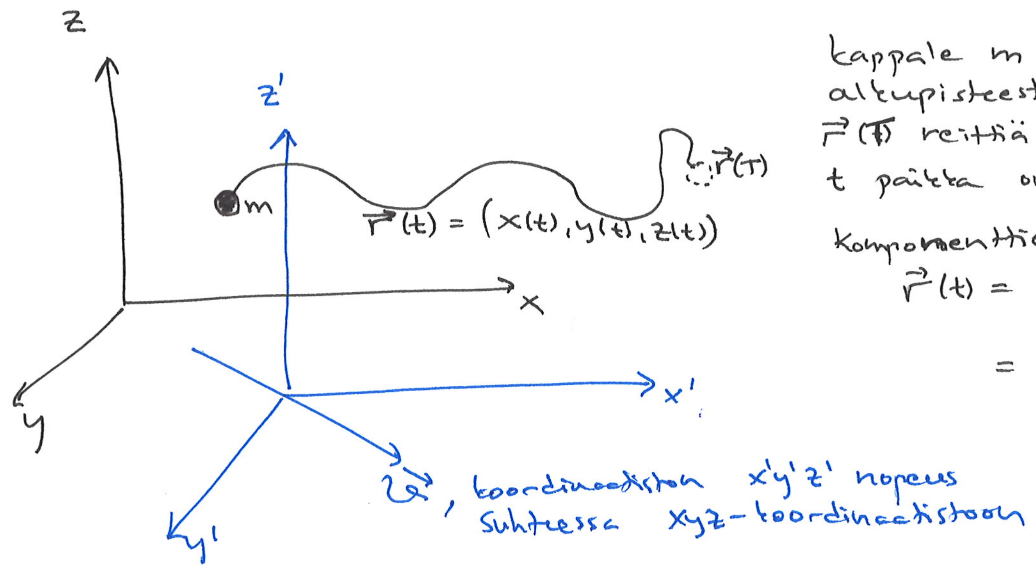
Maa+ aurinko-systeemiin kohdistuva kokonaisvääntömomentti:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r}_{Maa} \times \vec{G} + \vec{r}_{aurinko} \times (-\vec{G})$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_{Maa} - \vec{r}_{aurinko})}_{\vec{R}} \times \vec{G} = 0 \text{, sillä } \vec{R} \uparrow\downarrow \vec{G}.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{kokonaispyörimismäärä säilyy}}$

Galilein muunnos (inertiaalikoordinaatistosta toiseen)



kappale m kulkee alkupisteestä $\vec{r}(0)$ päätepisteeseen $\vec{r}(T)$ reittiä, jossa ajanhetkellä t paikka on $\vec{r}(t)$.

Komponenttiesityksessä
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$= x(t)\cdot\hat{x} + y(t)\cdot\hat{y} + z(t)\cdot\hat{z}$$
yksikkövektorita

Alkuperäisen xyz-koordinaatiston sijaan voimme tarkastella samaa kappaleen rataa vakionopeudella $\vec{\vartheta}$ kulkevassa x'y'z'-koordinaatistossa.

Kappaleen paikka saadaan <u>Galilein muunnoksesta</u>

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \underbrace{\vec{\vartheta}t}}$$

$\vec{\vartheta}t$: koordinaatiston x'y'z' siirtymä matka (oletus: ajanhetkellä t=0 koordinaatistot samassa paikassa, eli origot samat)

$\vec{r}\,'(t)$: paikka x'y'z'-koordinaatistossa

$\vec{r}(t)$: paikka xyz-koordinaatistossa

Huomaamme, että

- nopeuksille pätee $\vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) - \vec{\vartheta}t\right) = \vec{v}(t) - \vec{\vartheta}$

  $\vec{v}\,'(t)$: nopeus x'y'z' koordinaatistossa; $\vec{v}(t)$: nopeus xyz koordinaatistossa

- kiihtyvyyksille pätee $\vec{a}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t) - \vec{\vartheta}\right) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t)$

  → eli kiihtyvyydet samat
  Newtonin II lain perusteella molemmissa koordinaatistoissa vallitsevat <u>samat voimat</u>.

- huomaa vielä, että ~~aj~~ <u>aika</u> on sama molemmissa koordinaatistoissa

Entäpä jos x'y'z' koordinaatiston nopeus kiihtyy?

Oletetaan vakiokiihtyvyys $\vec{\alpha}$.

x'y'z:n siirtymä ajanhetkellä t on: $\underbrace{\vec{v}_0}_{\text{alkunopeus}} t + \frac{1}{2}\underbrace{\vec{\alpha}}_{\text{kiihtyvyys}} t^2$

jälleen oletus: $t=0 \rightarrow$ ~~koorigot~~ origot samassa paikassa

Galilein muunnos on nyt

$$\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\substack{\text{kappaleen paikka}\\ x'y'z'\text{-koordinaatistossa}}} = \underbrace{\vec{r}(t)}_{\substack{\text{kappaleen paikka}\\ xyz\text{-koordinaatistossa}}} - \underbrace{\vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2}_{\text{koordinaatiston } x'y'z' \text{ siirtymä}}$$

Nopeudet: $\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 - \vec{\alpha} t$

Kiihtyvyydet: $\vec{a}\,'(t) = \vec{a}(t) - \vec{\alpha}$.

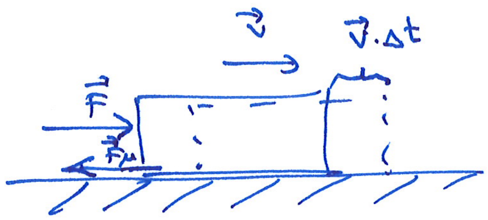
Newtonin II laki:

$$\underbrace{\sum \vec{F}'(t)}_{\substack{\text{voimat } x'y'z'\text{-}\\ \text{koordinaatistossa}}} = m\vec{a}\,'(t) = \underbrace{m\vec{a}(t)}_{\sum \vec{F}(t)} - m\vec{\alpha} = \underbrace{\sum \vec{F}(t)}_{\substack{\text{voimat } xyz\text{-}\\ \text{koordinaatistossa}}} \underbrace{- m\vec{\alpha}}_{\substack{\text{näennäisvoima, joka aiheutuu}\\ \text{koordinaatiston } x'y'z' \text{ kiihtyvyydestä } \vec{\alpha}.}}$$

Koordinaatiston kiihtyvyys (epäinertiaalisuus) aiheuttaa <u>näennäisvoiman</u>. Näennäisvoimat ovat aina <u>verrannollisia massaan</u> (vrt. gravitaatio).

Työ & koordinaatistomuunnokset

Voiman tekemä työ ($dW = F \cdot dx$) on itseasiassa huonosti määritelty suure, koska se riippuu koordinaatistovalinnasta.



vakionopeudella $\vec{v}$ etenevä kappaletta työnnetään voimalla $\vec{F}$, ~~Ajassa~~ Ajassa Δt laatikko siirtyy matkan $\vec{v} \cdot \Delta t$.

Voiman tekemä työ

$$W = F \cdot \Delta x = F \cdot v \cdot \Delta t$$

Samalla kitkan tekemä työ

$$W_\mu = \vec{F}_\mu \cdot \vec{\Delta x} = -F_\mu v \Delta t = -F v \cdot \Delta t$$

Mutta: laatikon nopeudella liikkuvassa koordinaatistossa ei laatikko liiku

→ siirtymä $= 0$

→ voiman F ~~tehty~~ tekemä työ $= 0$

? ? ?

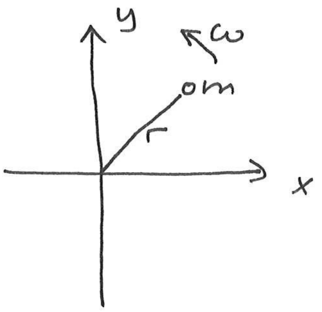
+ kitkan tekemä työ $= 0$.

Systeemiin (laatikko) tehty kokonaistyö on kuitenkin sama; eli kitkan tekemä työ $=$ − voiman tekemä työ

⇒ kokonaistyö $= 0$ koordinaatistosta riippumatta.

Pyörivä koordinaatisto

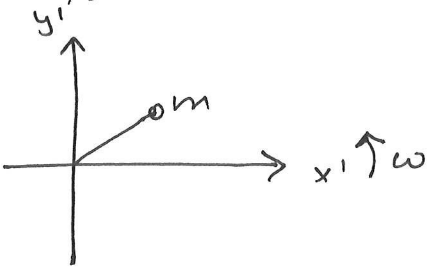
Tapaus 1: keskipakovoima



Kappale (massa m) pyörii langan (pituus r) varassa kulmanopeudella ω origon ympäri. Lanka kohdistaa kappaleeseen keskihakuvoiman, jonka suuruus on

$$|F_{keskihaku}| = mr\omega^2 .$$

Siirrytään kulmanopeudella ω pyörivään koordinaatistoon

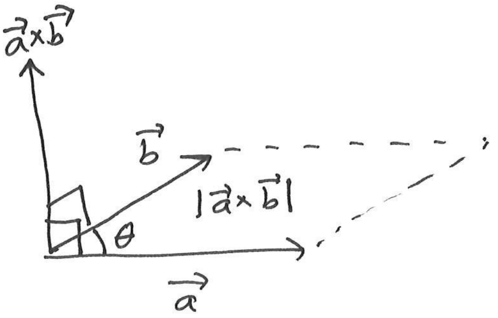


Kappale paikallaan. Lanka edelleen kohdistaa voiman $mr\omega^2$ (fysiikka ei muutu, jos lanka on jännittynyt niin se on jännittynyt kaikissa koordinaatistoissa)

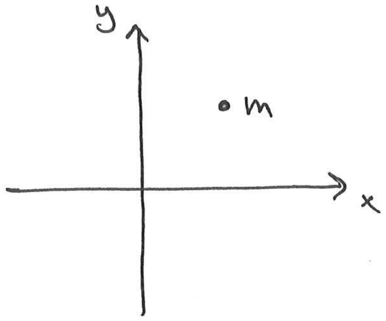
Koska kappaleella <u>ei kiihtyvyyttä</u>, on oltava voima joka kumoaa keskihaku voiman $\Rightarrow$ keskipakovoima

$$\boxed{\vec{F}_{keskipako} = -m\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})}$$

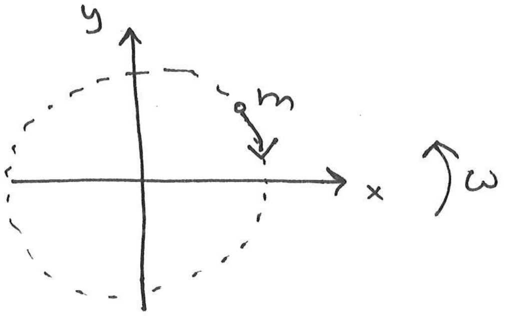
Ristitulo:



Tapaus 3: keskipakovoima + Coriolis voima



paikallaan oleva kappale.
miltä näyttää pyörivässä koordinaatistossa?



pyörii myötäpäivään kulmanopeudella $-\omega$.

$\Rightarrow$ tarvitaan keskihakuvoima

$$\left|\sum F_r\right| = m\omega^2 r.$$

· ei ulkoisia voimia

· keskipakovoima $-m\vec{\Omega}\times(\underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{r}}_{\omega\hat{e}_z\times\vec{r}})$, $\vec{\Omega} = \omega\hat{e}_z$

$$= \omega r\,\underbrace{\hat{e}_\perp(t)}_{\text{vektori kohtisuorassa sädettä vastaan "e ortho"}}$$

$$= +m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

· Coriolisvoima $-2m\vec{\Omega}\times\underbrace{\vec{v}_r}_{-\omega r\hat{e}_\perp(t)}$

$$= -2m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

$\Rightarrow$ Kokonaisvoima

$$\sum\vec{F}_r = -m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

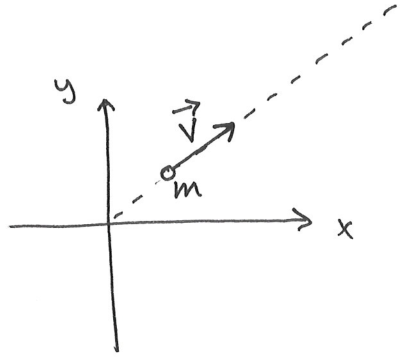
Suunta $-\hat{r}(t)$, eli kohti origoa.

Tapaus 4: Euleri voima

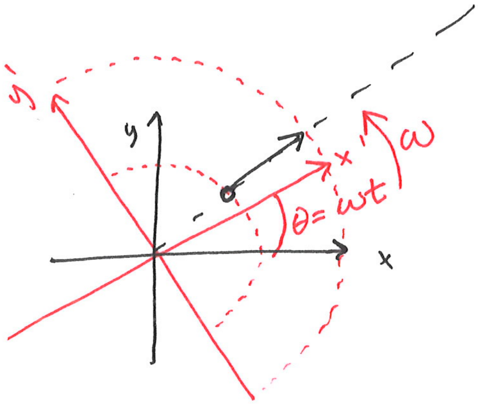
Jos pyörivän koordinaatiston kiertonopeus muuttuu, saamme vielä yhden näennäisvoiman ns. Eulerin voiman

$$\boxed{\vec{F}_{Euler} = -m\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}\times\vec{r}}$$

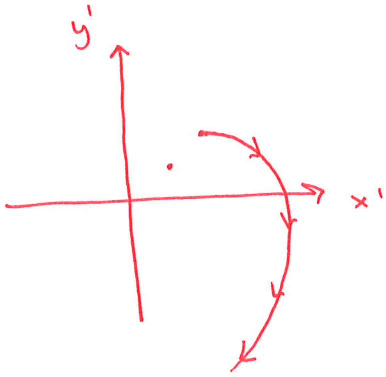
Tapaus 2: Coriolisvoima



kappale liikkuu vakionopeudella $\vec{v}$ poispäin origosta ⇒ ei voimia.



mitä näyttää kappaleen rata kulmanopeudella ω pyörivästä koordinaatistosta katsoen?



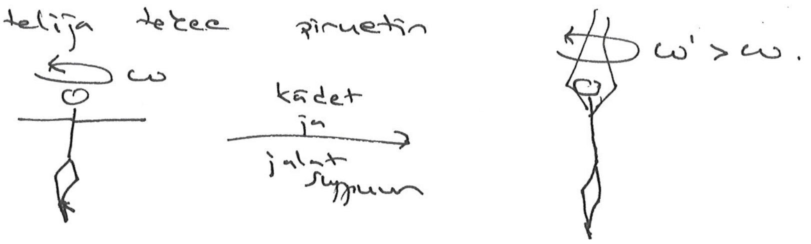
Näyttää siltä, että olisi kiihtyvyyttä kappaleen kulkusuuntaan nähden oikealle → ~~virtuaalinen~~ näennäisvoima.

$$\boxed{\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r}$$

nopeusvektori pyörivässä koordinaatistossa.

Pyörimismäärän säilyminen ja Coriolis voima

Luistelija tekee piruetin



pyörimisnopeus ω kasvaa kun hitausmomentti pienenee.

$|\vec{L}| = I\omega$

↑ hitausmomentti

$I \propto m, r.$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ ← ympyräradalle $|\vec{v}| = \omega r$.

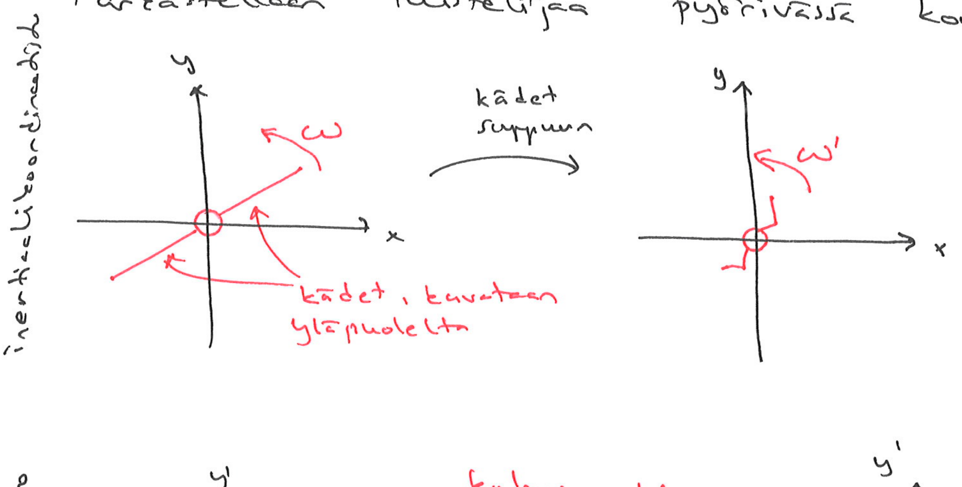
↑ kulmanopeus

$\Rightarrow |\vec{L}| = m\omega r^2$

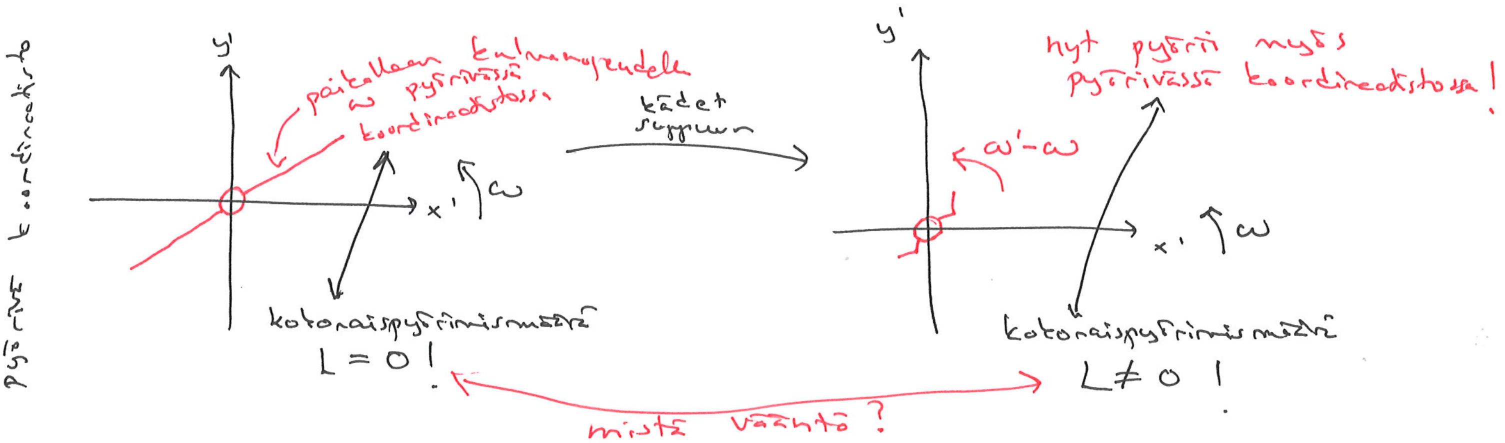
↑ ympyräradalle, pistemäinen kappale (massa m) kiertää kulmanopeudella ω säteellä r.

Jos kappale on monimutkaisempi kuin pistemäinen tai rata ei ole ympyrärata muuttuu tulos mutta lopputulema on että kokonaispyörimismäärä säilyy, jos kappaleeseen ei kohdistu vääntömomentteja..

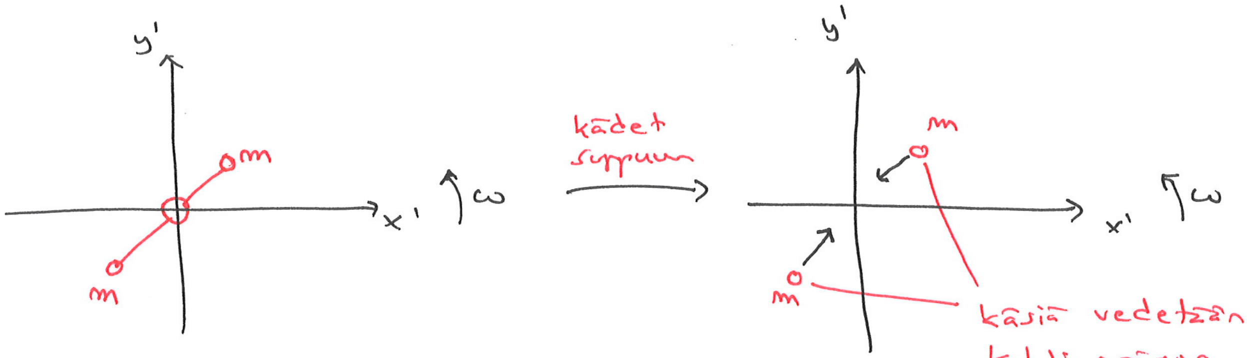
Tarkastellaan luistelijaa pyörivässä koordinaatistossa



pyörimisnopeus kasvaa, jolloin pyörimismäärä säilyy.
⇒ ei vääntöjä.



Tarkastellaan käsien liikettä. Kuvataan kädet pistemäisinä massoina m.



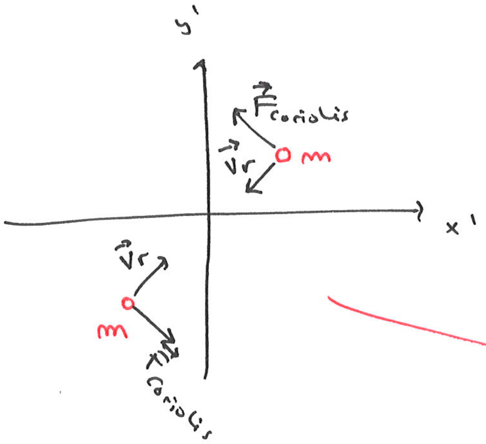
⇒ kädet liikkuvat säteittäisesti pyörivässä koordinaatistossa

⇒ niihin kohdistuu Coriolisvoima

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r$$

ylöspäin, $|\vec{\Omega}| = \omega$.

kohti origoa



Coriolis voima toimii vääntömomenttina kiihdyttäen pyörimistä.

Vastaavasti jos kädet levitetään ⇒ liike poispäin origosta

⇒ Coriolis voiman suunta vaihtuu

⇒ pyöriminen hidastuu.

Huomaa vielä, että keskipakovoima on radiaalinen (säteen suuntainen) eikä siksi aiheuta vääntömomenttia.