Kurssitentti 21.10.2020

Ratkaisut

Tehtävä 1

> $assume(c > 0)$

> $about(c)$

```
Originally c, renamed c~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

> $limit\left(\frac{c\cdot n + 2\cdot \mathrm{sqrt}(n)}{c^2 - n\cdot \mathrm{sqrt}(c)}, n = \mathrm{infinity}\right)$

$$-\sqrt{c\sim} \quad (1.1)$$

Supistetaan termi n.

> $limit\left(\frac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^4 - 1}, x = 1\right)$

$$-\frac{1}{4} \quad (1.2)$$

Voi käyttää joko L'Hospitalin sääntöä tai jakaa tekijöihin ja supistaa $x - 1$.

Tehtävä 2

> $limit\left(\frac{k}{2\cdot k + 1}, k = \mathrm{infinity}\right)$

$$\frac{1}{2} \quad (2.1)$$

Sarja hajaantuu, koska yleisen termin raja-arvo ei ole nolla.

b) Supistetaan $\sqrt{k}$, jolloin yleinen termi muotoa $\frac{1}{2\,k^{2.5} + (-1)^k}$. Nimittäjässä

$2\,k^{2.5} + (-1)^k \geq 2\,k^{2.5} - 1 \geq 2\,k^{2.5} - k^{2.5} = k^{2.5} \geq k^2$.

Koska yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava sarja suppenee. (Suhdetesti ei toimi tässä.)

c) Merkitään $a_k = \frac{k\cdot x^k}{3^k}$ ja käytetään suppenemisen tutkimisen suhdetestiä. Tällöin

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \rightarrow \frac{|x|}{3}$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee, jos $\frac{|x|}{3} < 1$, ja hajaantuu, jos $\frac{|x|}{3} > 1$.

Tapauksissa $x = \pm 3$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.
Tulos: Sarja suppenee, kun $-3 < x < 3$ ja hajaantuu muulloin.

>

Tehtävä 3

> $f := x \rightarrow x \cdot \exp(x)$

$$f := x \mapsto x\, e^x \tag{3.1}$$

> $f'(x)$

$$e^x + x\, e^x \tag{3.2}$$

> $factor(\%)$

$$e^x\,(x+1) \tag{3.3}$$

Tämä on > 0, kun $x > -1$, joten f on aidosti kasvava alueessa $x \geq -1$.

b) Selvästi $f(0) = 0$, joten $f^{-1}(0) = 0$. Käänteisfunktion derivaattakaavan perusteella

$$(f^{-1})'(0) = \frac{.1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

c) Derivoidaan kaksi kertaa:

> $W(x) \cdot \exp(W(x)) = x$

$$W(x)\, e^{W(x)} = x \tag{3.4}$$

> $diff(\%, x, x)$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} W(x)\right) e^{W(x)} + 2\left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 e^{W(x)} + W(x)\left(\frac{d^2}{dx^2} W(x)\right) e^{W(x)} + W(x)\left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 e^{W(x)} = 0 \tag{3.5}$$

> $solve\left(\%, \frac{d^2}{dx^2} W(x)\right)$

$$-\frac{\left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 (W(x)+2)}{W(x)+1} \tag{3.6}$$

> $subs(\{x = 0, W(x) = 0, W'(x) = 1\}, \%)$

$$-2 \tag{3.7}$$

Tehtävä 4

> $Int((x^3 + x) \cdot \ln(x^2+1), x = 0..1) = int((x^3 + x) \cdot \ln(x^2+1), x = 0..1)$

$$\int_0^1 (x^3 + x)\ln(x^2+1)\, dx = -\frac{3}{8} + \ln(2) \tag{4.1}$$

Tehtävä 5

> $dsolve(\{x \cdot y'(x) + n \cdot y(x) = 1, y(1) = 1\})$

$$y(x) = \frac{1}{n} + x^{-n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{5.1}$$

> $simplify(\%)$

$$y(x) = \frac{1 + x^{-n}(-1+n)}{n} \tag{5.2}$$

Tehtävä 6

> $DY := y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$

$$DY := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + a \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + b\, y(x) = 0 \quad (6.1)$$

> $subs(y(x) = \exp(3 \cdot x), DY), subs(y(x) = \exp(-5 \cdot x), DY)$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{3x} + a \left(\frac{d}{dx} e^{3x} \right) + b\, e^{3x} = 0, \frac{d^2}{dx^2} e^{-5x} + a \left(\frac{d}{dx} e^{-5x} \right) + b\, e^{-5x} = 0 \quad (6.2)$$

> $simplify(\{\%\})$

$$\left\{ e^{3x} (3\, a + b + 9) = 0, -5\, e^{-5x} \left(a - \frac{b}{5} - 5 \right) = 0 \right\} \quad (6.3)$$

> $solve\left(\left\{ 3\, a + b + 9 = 0, a - \frac{b}{5} - 5 = 0 \right\} \right)$

$$\{a = 2, b = -15\} \quad (6.4)$$

> $assign(\%)$

> DY

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \frac{d}{dx} y(x) - 15\, y(x) = 0 \quad (6.5)$$

> $dsolve(\{DY, y(0) = 0, y'(0) = 16\})$

$$y(x) = -2\, e^{-5x} + 2\, e^{3x} \quad (6.6)$$