ELEC-C4140

Kenttäteoria (5 op)

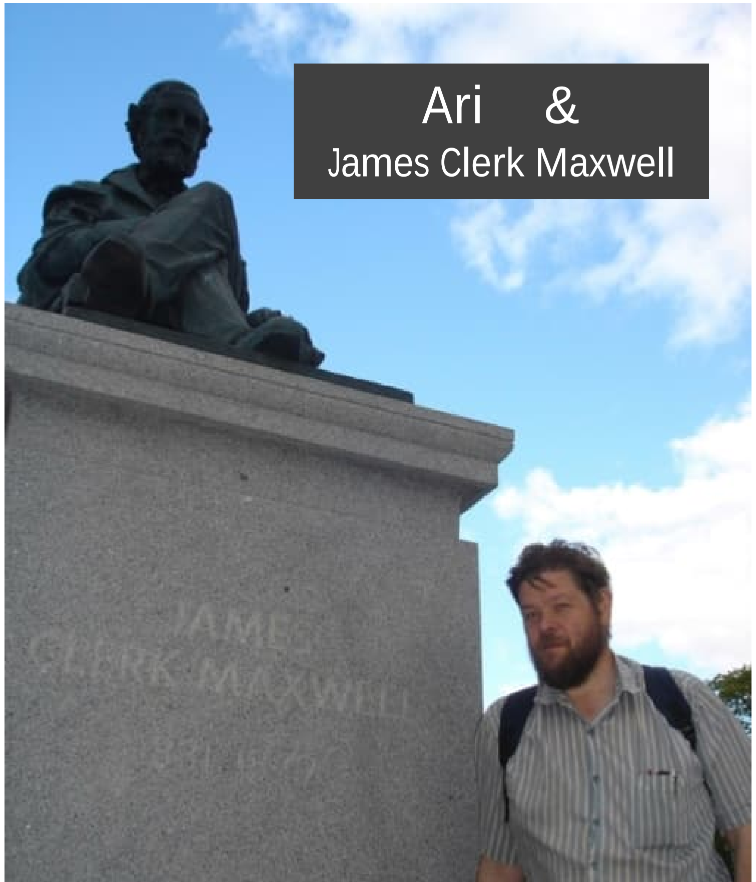
Syksy 2022

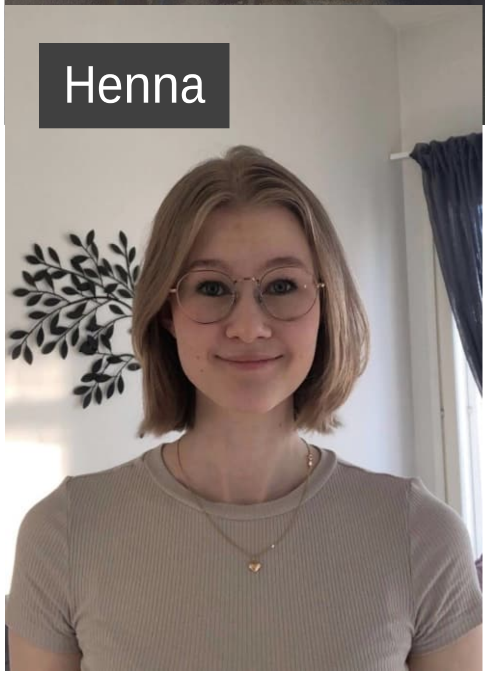
Opettajat:

- Vastuuopettajat:
  - Ari Sihvola (pääluennoitsija)
  - Jari Holopainen

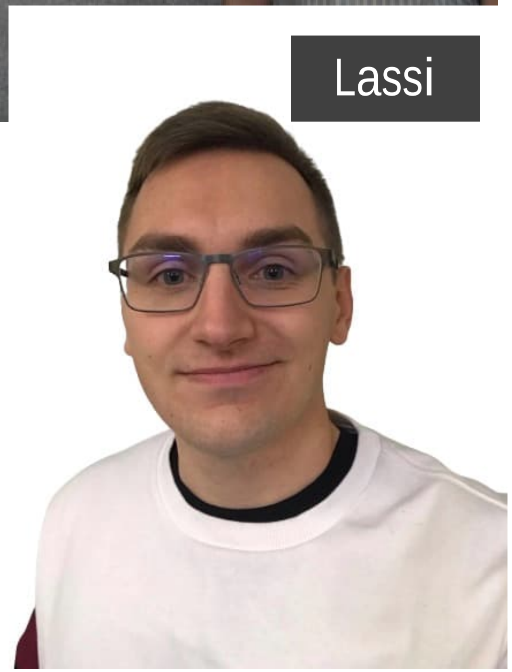
- Tuntiopettajat:
  - Victor Barannik
  - Lassi Lahtiluoma
  - Henna Nyblom
  - Matthias Tiemann


HANS
CHRISTIAN
ØRSTED
Jari &
Hans Christian
Örsted


Ari &
James Clerk Maxwell


Henna


Matthias


Lassi

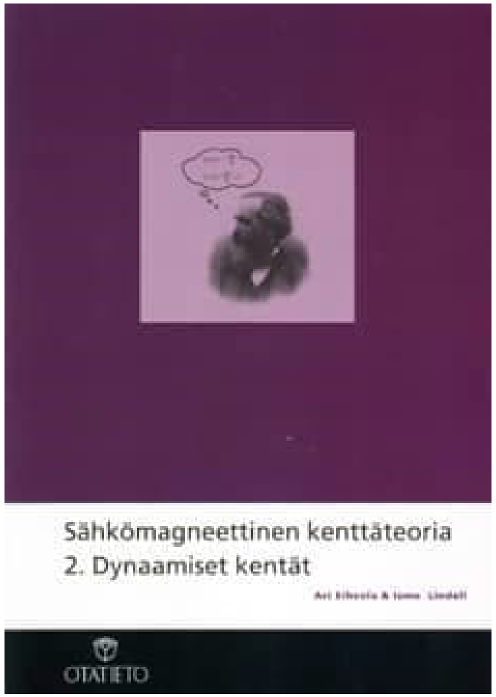

Victor

Oppikirja(t)

- Ismo Lindell & Ari Sihvola: *Sähkömagneettinen kenttäteoria*
  - 1 Staattiset kentät
  - 2 Dynaamiset kentät

    Otatieto/Gaudeamus

    (monia painoksia)



Oheislukemistona tarvittaessa: ”*Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja*”

Kurssin suoritus

- Edellyttää esitietoja ja -taitoja:
  - Matematiikkaa, (sähkö)fysiikkaa, piirianalyysiä ja jonkin laskentaohjelman
  - Lisäksi suosittelemme kurssin Differentiaali- ja integraalilaskenta 3 suorittamista kurssin ohessa 1. periodissa
- Edellyttää ponnisteluja:
  - Viikoittaiset luennot tiistaisin klo 10-12 ja keskiviikkoisin klo 14-16
  - Viikoittaiset palautettavat laskuharjoitustehtävät, palautus perjantaisin
  - Välikoe (1. arviointiviikolla) ja loppukoe (2. arviointiviikolla)
- Osaamisen jatkuva arviointi ja arvosanan muodostuminen:
  - Viikoittaiset palautettavat laskuharjoitustehtävät 40 %
  - Välikoe luentosalissa arviointiviikolla lokakuussa 30 %
  - Loppukoe luentosalissa arviointiviikolla joulukuussa 30 %
  - Kurssin suorittamiseen vaaditaan loppukokeessa vähintään 1/3 pisteistä ja 50% kokonaispisteistä, muut arvosanat 10 %-yksikön portain

Oppimistilat ja -alustat

- Vuorovaikutteiset luennot (sali AS1). Ei hybridiosallistumista, ei nauhoituksia.
- MyCourses – materiaalit, harjoitustehtävien palautus (määräaika perjantaisin klo 18:00)

Laskuharjoitustehtävät (40 % kurssiarvosanasta)

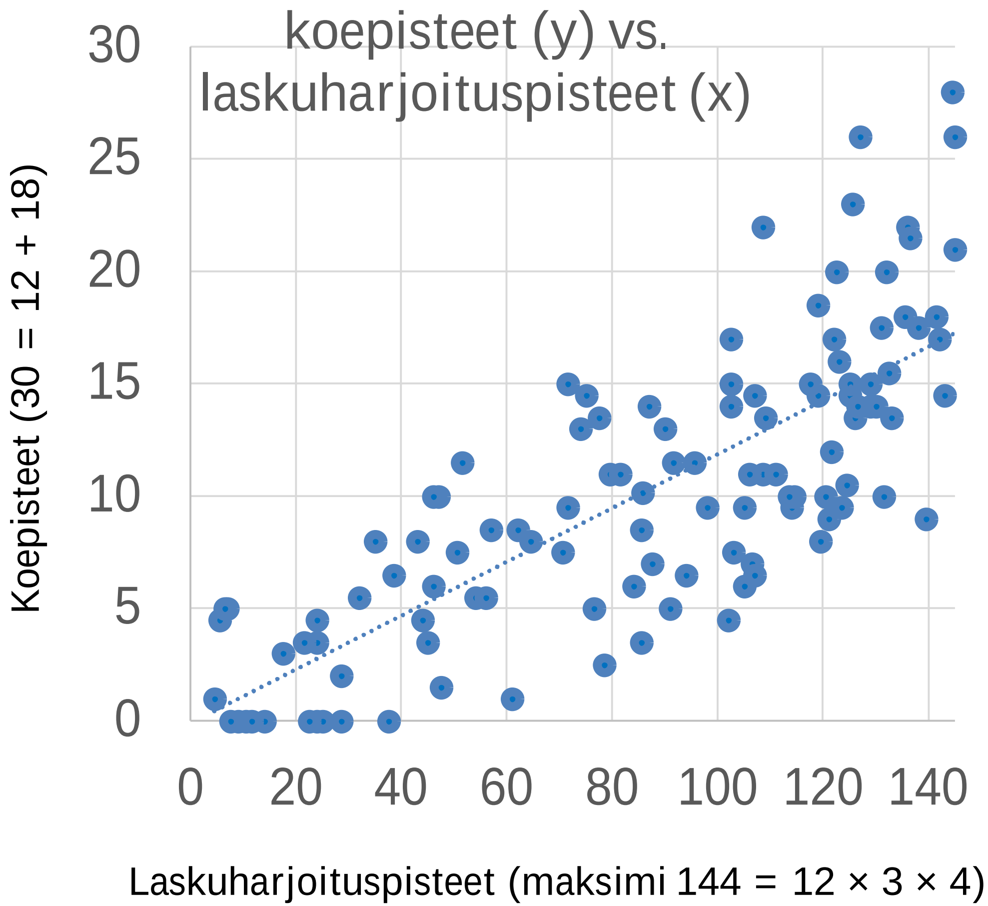
- Lähilaskarit Kandikeskuksessa (tiedot seuraavalla sivulla)
- Palautetaan perjantaisin viim. kello 18:00 MyCoursesissa
- Kolme tehtävää per viikko, 12 viikkoa
- Vastausten pisteytys 0-4 pistettä (tarkemmat pisteytyskriteerit löytyvät palautuslaatikosta):
  - Sanallliset perustelut ja esitystapa
  - Laskut
  - Vastauksen laajuus (ts. onko kaikkiin tehtävän kohtiin vastattu)
- Oppimisessa saa ja kannustetaan tekemään yhteistyötä ja tehtävistä voi keskustella muiden kanssa
- Osaaminen arvioidaan yksilöllisesti, joten jokaisen opiskelijan tulee palauttaa vain itse tekemänsä tuotokset

Lähilaskarit

- Harjoituksissa kurssin henkilökunta tukee ja auttaa tehtävien suorittamisessa. Oppimisyhteistyö opiskelijoiden kesken ja vertaistuki on myös suositeltavaa. Tämä ei tietenkään tarkoita tehtävien ratkaisujen kopioimista toisilta.

Kaikki laskarit kandikeskuksessa	1. periodi (maks.määrä)	2. periodi	assariopettaja
To 10-12	Y347	Y347	Lassi
To 12-14	D-sali	D-sali	Henna, Victor
To 14-16	U358	U358	Lassi, Matthias
Pe 10-12	U3	U3 (11.11. A1)	Victor
Pe 12-14	U5	U3	Henna
Pe 14-16	U3	U3	Matthias

Koepisteet vs. laskuharjoituspisteet, 2021



- Perusjoukko 113 opiskelijaa (tulokset ilman tammikuun uusintakoetta)
- Korrelaatiokerroin $R = +0{,}79$
  - laskettu Excelin CORREL-funktiolla
  - huomattava positiivinen korrelaatio
  - syy-seuraussuhde?
- p-arvo < 0,001
  - laskettu Excelin t-testifunktiolla T.TEST
  - *p*-arvo on todennäköisyys sille, että tulos on sattumaa eli se voidaan yrittää selittää otantavirheellä

Opiskelijoiden palautetta 2021
”Kurssin toteutus ja luennoitsija olivat mielestäni erittäin hyviä. Tykkäsin, että käytiin ainakin nopeasti kertauksena aiempienkin kurssien asioita ja muutenkin asiat selitettiin hyvin.”
”Kurssi oli mielestäni toteutettu niin, että se selkiytti lähes kaikkia asioita, mitä opetettiin kurssilla sähkö ja magnetismi. Huomasi, että tällä kurssilla sai vastauksia moniin kysymyksiin, mitä oli ollut sähkökentistä ja luennoilla sekä tehtävissä oli mielestäni sisällytetty mielenkiintoisia tehtäviä.”
”Olisi mukava jos kurssilla olisi kalvot, eikä pelkästään muistiinpanot luennolta. Jos käy ilmi, että yksi luento jää käymättä ja koittaa selvittää luentomuistiinpanoista asioita, se on lähes mahdotonta.”
”Muilla kursseilla on usein listattu oleelliset alueet luentokalvojen alkuun. Myös sivunumerot näistä asioista olisivat auttaneet.” V: Aikataulut, aiheet ja niihin liittyvät oppikirjan sivunumerot löytyvät ”Luennot”-sivulta MyCosta.
”Enemmän esimerkkejä luentoihin.”
”Oppikirja olisi kiva jos olisi mahdollista ostaa sähköisenä.”

Opiskelijoiden palautetta 2021
”Vaikka aiheet olivatkin kokeissa ja laskareissa samat, oli niissä ihan eri meininki. Kokeissa piti olla asiat sisäistettynä muistissa, kun taas laskareissa kirja ja muut materiaalit olivat kokoajan vieressä. Lisäksi laskareissa assarit antoivat usein tarvittavat kaavat suoraan eli itse ei tarvinnut edes miettiä, mikä kaava sopii mihinkin tehtävään.”
”Mielestäni kurssi oli erittäin vaikea, sillä laskuharjoitusten loppupäästä ei ollut mahdollista nähdä oikeat lukuarvot tehtävien vastauksiin, mistä johtuen usein ei ollut mahdollista päätellä, meneekö yhtään oikeaan suuntaan.”

Välikoe (30 %) ja loppukoe (30 %)

- Kokeet suoritetaan “perinteisesti” kynä & paperi –menetelmällä luentosalissa
- Kokeissa saa olla mukana peruslaskin ja itsetehty, käsinkirjoitettu A4-kokoinen paperi, jossa voi olla kuvia, kaavoja ja sanallisia selityksiä, mutta ei esimerkiksi suoria laskuharjoitustehtävävastauksia. Paperin tekeminen on osa oppimista.
- Tehtäväpaperissa annetaan “kaavakokoelma”.

$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to (j\omega)^2 \to -\omega^2$, $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$, $\epsilon \to \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$, $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ | $i \cdot (-i) = 1$

$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ | $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\,\Omega$ | $\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$ | $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$ | $\frac{k}{\omega\mu_0} = \frac{1}{\eta_0}$ $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ | $\frac{i}{-i} = -1$

$H(r) = \frac{\nabla \times E(r)}{-j\omega\mu}$ tasoaallon magneettikenttä

$= \left(\frac{1}{-j\omega\mu} u_z \times E_+ \frac{d}{dz} e^{-jkz}\right) + \left(\frac{1}{-j\omega\mu} u_z \times E_- \frac{d}{dz} e^{jkz}\right)$

$= \left(\frac{k}{\omega\mu} u_z \times E_+ e^{-jkz}\right) - \left(\frac{k}{\omega\mu} u_z \times E_- e^{jkz}\right)$

$= H_+ e^{-jkz} + H_- e^{jkz}$

| $\eta_0^* = \eta_0$ | $k^* = k$ | $E_0 \cdot E_0^* = \lvert E_0\rvert^2$ | $i \cdot i = -1$ |

kompleksiluvun konjugaatti → muuta etumerkkiä! img.osa

$(u_x + u_y) \times (u_y + u_x)$ vektorit
$= (u_x \cdot u_y + u_y \cdot u_x)$

$\frac{k}{\eta} = \omega\epsilon$ | esim $e^{-jk_0x} \Rightarrow e^{+jk_0x}$ | $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz) | $[\omega] = \frac{1}{s}$

$e^{-jkz} \cdot e^{+jkz} = \frac{e^{jkz}}{e^{jkz}} = 1$ | $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ | $(ab)^* = a^* b^*$

Reaalinen ajastariippuva: $\bar{E}(\bar{r},t)$
Kompleksinen ei aikariippuvuutta: $\bar{E}(\bar{r})$

$\mathrm{Re}\{\bar{E}(\bar{r})e^{j\omega t}\} = \bar{E}(\bar{r},t)$ reaaliosa

1

kun $t = 0 \Rightarrow$ $-\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$
kun $\underset{\omega t}{90°} \Rightarrow$ $-\sin(90°) = -1$, $\cos(90°) = 0$

esim. $\bar{E} = \bar{E}_r + j\bar{E}_i$ imaginaariosa

$\bar{E}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\{(\bar{E}_r + j\bar{E}_i)(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\}$
$= \bar{E}_r\cos(\omega t) - \bar{E}_i\sin(\omega t)$

Kompleksinen Poyntingin vektori:
$\bar{S}(\bar{r},t) = \bar{E}(\bar{r},t) \times \bar{H}(\bar{r},t)$
$= \mathrm{Re}\{\bar{E}(\bar{r})e^{j\omega t}\} \times \mathrm{Re}\{\bar{H}(\bar{r})e^{j\omega t}\}$
$\Downarrow$
$\bar{S}(\bar{r}) = \frac{1}{2}\bar{E}(\bar{r}) \times \bar{H}^*(\bar{r})$

alkaa reaaliosasta palaa img.osaan
⇒ elliptinen polarisaatio

$\nabla = u_z \frac{\partial}{\partial z} / u_x \frac{\partial}{\partial x} / u_y \frac{\partial}{\partial y}$

$\nabla \times (\nabla \times E) = -j\omega\mu\nabla \times H$
$= \omega^2\mu\epsilon E$
$= \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$
$\Rightarrow \nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0$

Maxwellin yhtälöt:
$\nabla \times \bar{E}(\bar{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(\bar{r},t)$
$\nabla \times \bar{H}(\bar{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}(\bar{r},t) + \bar{J}(\bar{r},t)$
$\nabla \cdot \bar{D}(\bar{r},t) = \rho(\bar{r},t)$
$\nabla \cdot \bar{B}(\bar{r},t) = 0$

Maxwellin yhtälöt aikaharmonisessa ja lähteettömässä alueessa ($J = 0$, $\rho = 0$) tapauksessa:
$\nabla \times E = -j\omega\mu H$
$\nabla \times H = j\omega\epsilon E$ sähkökentän voimakkuus
$\nabla \cdot D = 0 \Rightarrow D = \epsilon E$ sähkövuon tiheys
$\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow B = \mu H$ magneettivuon tiheys, magneettikentän voimakkuus

etenemiskerroin: $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ | $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ | Ohmin laki $J = \sigma E$ | $[\epsilon] = \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$ | $\left[\frac{\sigma}{\omega}\right] = \frac{A}{V \cdot m} \cdot s$

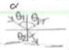
Tasoaalto alueessa, jossa suhteellinen permitiivisyys on ϵ_r ja johtavuus on σ, jolloin yhtälö $\nabla \times H = j\omega\epsilon_r\epsilon_0 E + J$ voidaan kirjoittaa käyttämällä Ohmin lakia $J = \sigma E$ muotoon $\nabla \times H = j\omega\epsilon E$, kun $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 - \frac{j\sigma}{\omega}$

TASOAALTO HÄVIÖTTÖMÄSSÄ VÄLIAINEESSA ⇑
TASOAALTO HÄVIÖLLISESSÄ VÄLIAINEESSA ⇓

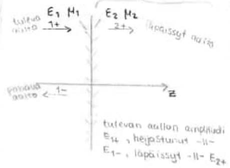
Esimerkiksi z-akselin suuntaan etenevä tasoaalto HÄVIÖLLISESSÄ VÄLIAINEESSA (toisin kuin ennen) olisi $E(z) = E_0 e^{-jkz} \Rightarrow E_0$ on sähkökentän vektori kohdassa $z = 0$. Kompleksivektori kertoo polarisaation, amplitudi sentänvoimakkuuden kyseisessä pisteessä

$E(z) = E_0 e^{-k_i z} e^{-jk_r z} \Rightarrow \underset{\beta}{k_r}$: aallon etenemiskerroin, $\underset{\alpha}{k_i}$: aallon vaimenemiskerroin | $\lambda = \frac{2\pi}{k_r}$ | $[\nabla] = \frac{1}{m}$ $[t] = \frac{1}{s}$ $[H] = \frac{A}{m}$ $[E] = \frac{V}{m}$ $[B] = T = \frac{V \cdot s}{m^2}$

Diffuusioyhtälö : $\nabla^2 H - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} H = 0$ | Snellin laki : $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$



- Kohtisuora heijastuminen rajapinnasta
  - Aalto tulee kohtisuorasti +z-akselin suuntaan. Olkoot alueen $z < 0$ materiaaliparametrit $\epsilon_1\mu_1$ ja puoliavaruuden $z > 0$ ϵ_2, μ_2.
  - Etenevän aallon (positiivisen z-akselin suuntaan kulkevan) kenttien eksponentissa on etumerkkinä $- \Rightarrow e^{-jk_1z}$, palaavan aallon $+ \Rightarrow e^{+jk_1z}$
  - tasoaaltojen parametrit : aaltoluku $k_i = \omega\sqrt{\mu_i\epsilon_i}$ ja aaltoimpedanssi $\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$
  - kokonaiskentät etenemissuuntaisen muuttujan z-funktiona :
    - → $E_1(z) = u_x E_{1+} e^{-jk_1z} + u_x E_{1-} e^{+jk_1z}$
    - → $E_2(z) = u_x E_{2+} e^{-jk_2z}$
  - magneettikenttä on polarisoitunut y-suuntaisesti , jolloin magneettikenttäfunktiot :
    - → $H_1(z) = u_y \frac{E_{1+}}{\eta_1} e^{-jk_1z} - u_y \frac{E_{1-}}{\eta_1} e^{+jk_1z}$
    - → $H_2(z) = u_y \frac{E_{2+}}{\eta_2} e^{-jk_2z}$



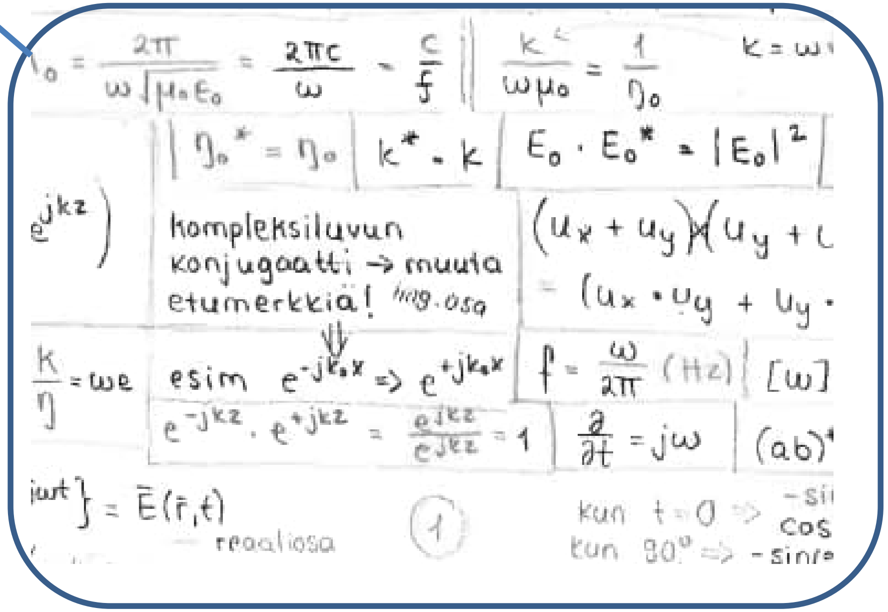
$\bar{E}_{1+}, \bar{H}_{1+}, \bar{u}_z$ muodostavat oikean käden vektorikolmikon , samoin $\bar{E}_{1-}, \bar{H}_{1-}, -\bar{u}_z$

- jos tulevan aallon kenttäamplitudi (E_{1+}) tunnetaan, on tehtävässä jäljellä 2 tuntematonta : heijastuneen (E_{1-}) ja läpäisseen (E_{2+}) aallon amplitudit ⇒ ne saadaan kahdesta rajapintaehdosta
  → nämä ehdot ovat tangentiaalisen sähkökentän & magneettikentän jatkuvuudet rajapinnan $z = 0$ yli
- koska sekä sähkö- että magneettikenttä ovat rajapinnan suuntaisia sen molemmin puolin, on kokonaiskenttien oltava jatkuvat :
  → $\bar{E}_1(0) = \bar{E}_2(0) \Rightarrow E_{1+} + E_{1-} = E_{2+}$
  → $\bar{H}_1(0) = \bar{H}_2(0) \Rightarrow \frac{E_{1+}}{\eta_1} - \frac{E_{1-}}{\eta_1} = \frac{E_{2+}}{\eta_2}$

$[J] = \frac{A}{m^2}$ $[D] = \frac{A \cdot s}{m^2}$ | $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

näistä kahdesta yhtälöstä saadaan heijastuneen & läpäisseen aallon voimakkuudet :
→ heijastuneelle aallolle : $R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ heijastuskerroin

→ läpäisykerroin T läpäisseen aallon suhteena tulevaan aaltoon : $T = \frac{E_{2+}}{E_{1+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$



$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$ | $\frac{k}{\omega\mu_0} = \frac{1}{\eta_0}$ $k = \omega$
$\eta_0^* = \eta_0$ | $k^* = k$ | $E_0 \cdot E_0^* = \lvert E_0\rvert^2$
kompleksiluvun konjugaatti → muuta etumerkkiä! img.osa
$(u_x + u_y) \times (u_y + u$
$= (u_x \cdot u_y + u_y \cdot$
$\frac{k}{\eta} = \omega\epsilon$ esim $e^{-jk_0x} \Rightarrow e^{+jk_0x}$ | $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz) | $[\omega]$
$e^{-jkz} \cdot e^{+jkz} = \frac{e^{jkz}}{e^{jkz}} = 1$ | $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ | $(ab)^*$
$\} = \bar{E}(\bar{r},t)$ reaaliosa
1
kun $t = 0 \Rightarrow$ $-\sin$ $\cos$
kun $90° \Rightarrow$ $-\sin$

Nablaoperaatiot

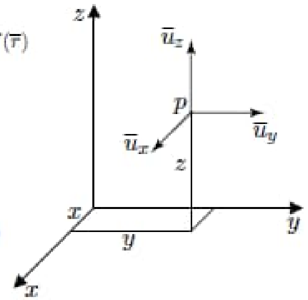
Karteesinen koordinaatisto

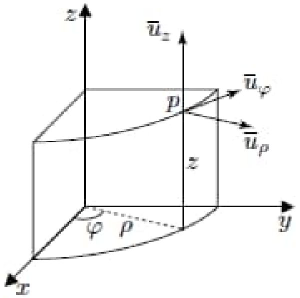
$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$





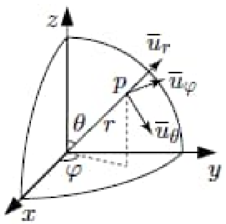
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r \sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z,$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta,$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r \sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos\theta,$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$

$dV = dx\, dy\, dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Gaussin lause $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\displaystyle\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\, \mathrm{C}$