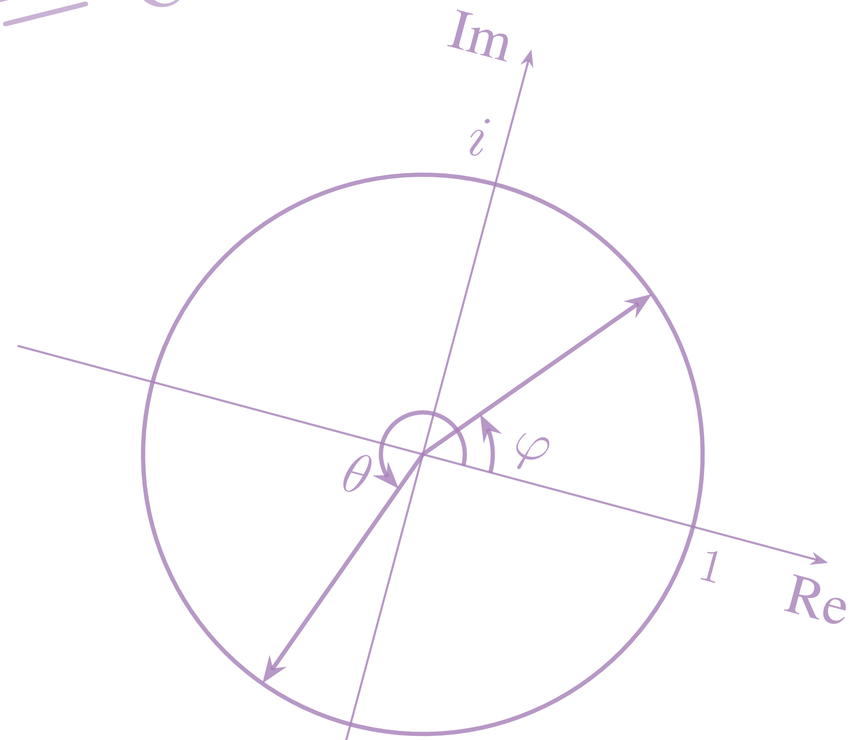
$\mathbb{C}$ompleksiluvu$i$sta fukseille

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$



$$i^2 = -1$$

Nikolai Argatoff
09/2022

Lunttilappu

Peruskaavoja

Olkoon $z = a + ib = re^{i\varphi}$ ja
$w = c + id = qe^{i\theta}$

Konjugaatti

$$\begin{aligned}\bar{z} &= a - ib \\ &= re^{-i\varphi}\end{aligned}$$

Yhteenlasku

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

Kertolasku

$$\begin{aligned}zw &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ &= rqe^{i(\varphi+\theta)}\end{aligned}$$

Jakolasku

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{r}{q}e^{i(\varphi-\theta)}\end{aligned}$$

Moduuli

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= r\end{aligned}$$

Eulerin lause

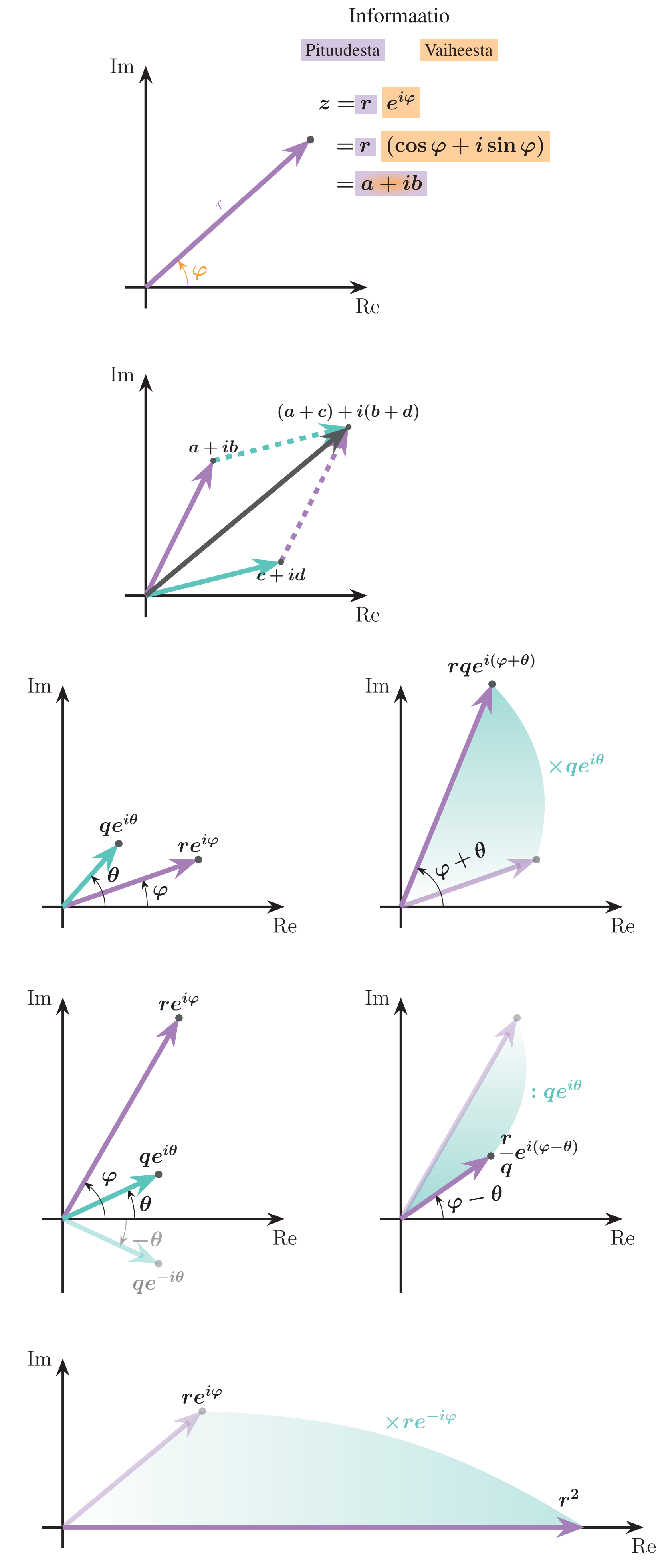
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Kosini ja sini

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i2}$$

Geometrinen kuvaus



*For the rest, neither the false nor the true roots are always real, sometimes they are only **imaginary**, that is to say one may imagine as many as I said in each equation, but sometimes there exists no quantity corresponding to those one imagines.*

René Descartes

*The imaginary numbers are a fine and wonderful refuge of the Divine Sprit, almost an amphibian between **being and nonbeing***

Gottfried Leibniz

*... of such numbers we may truly assert that they are neither nothing, nor greater than nothing, nor less than nothing; which necessarily constitutes them imaginary, or **impossible***

Leonhard Euler

*That this subject has hitherto been surrounded by mysterious obscurity, is to be attributed largely to an **ill adapted notation**. If, for example, $+1$, -1, and the $\sqrt{-1}$ had been called direct, inverse and **lateral** units, instead of positive, negative and **imaginary** (or even impossible), such an obscurity would have been out of the question.*

Carl Friedrich Gauß

*One might think this means that imaginary numbers are just a mathematical game having nothing to do with the real world. From the viewpoint of positivist philosophy, however, one cannot determine what is real. All one can do is find which mathematical models describe the universe we live in. It turns out that a mathematical model involving imaginary time predicts not only effects we have already observed but also effects we have not been able to measure yet nevertheless believe in for other reasons. So **what is real and what is imaginary**? Is the distinction just in our minds?*

Stephen Hawking

Sujut i:n kanssa (Voit ohittaa tämän sivun huoletta)

Kompleksiluvut vilahtavat ohikiitävän hetken ajan monissa matematiikan ja fysiikan kursseissa, kadoten kuin niitä ei olisi ollutkaan, vain lopulta ilmestyäkseen uudelleen seuraavassa periodissa. Väliaikaisen luonteensa vuoksi kompleksiluvut jäävät usein sivuroolin asemaan, joille ei opetuksessa riitä ruutuaikaa. Pyrin siis esittelemään TFM-fuksin tarvitsemat perusteet kompleksiluvuista rentoon ja intuitiiviseen tyyliin. Tämä teksti on kuitenkin yksi lukuisten oppimateriaalien joukossa[1], joista toivottovasti löydät juuri sinulle mieluisen näkökulman.

Olet varmaan jo ehtinyt törmätä imaginaariyksikköön i, joka määritellään seuraavan yhtälön mukaisesti

$$i^2 = -1$$

Jos ajatus i:stä tuntuu vaikealta sulattaa, älä anna sen häiritä. Samat vatsavaivat ovat askarruttaneet historiamme suurimpia ajattelijoita, kuten edellisen sivun historialliset lainaukset paljastavat. Vastalääke imaginaariyksikön aiheuttamille kummastuksen oireille löytyykin historiankirjoista. Ne laskennalliset ja geometriset ideat, jotka ovat nykyään punottu i:n ympärille, ovat lukuisten sukupolvien ajalta muovautuneesta tietämyksestä.

Itsensä valistaminen i:n menneisyydestä antaa siis kontekstia sille, mistä koulukirjoissa esitetyt konseptit ovat saaneet alkunsa. i:n debyytti on myöskin kaikkea muuta kuin pitkästyttävä, vaan lähtee liikkeelle matemaattisista kaksintaisteluista 1500-luvun Italiassa[2]. Emme esittele kompleksilukujen historiaa sen enempää, mutta kiinnostuneille aiheesta on tehty monia ensiluokkaisia julkaisuja[3].

Samalla jätämme myöskin filosofisen murehtimisen i:n “olemassaolosta”. Vuosisatojen ajan lukuisat tiedemiehet ovat yrittäneet ummistaa silmänsä i:lle. Hiljalleen, joskin varsin vastahakoisesti, tämä epämukavuus väistyi syrjään, sillä i osoittautui olevan äärimmäisen tehokas ja jopa välttämätön työkalu monenlaisten ongelmien ratkaisemisessa.

Loppujen lopuksi, onko väliä onko i todellinen, jos se auttaa meitä ratkaisemaan todellisia ongelmia. Nykypäivänä olemme alakoulusta asti sujut nollan ja negatiivisten lukujen kanssa, mutta satojen vuosien ajan niitä pidettiin epätodellisina. Ehkä matematiikassa on vain kyse asioihin tottumisesta, joten aloitetaan totuttautuminen i:hin ilman epäröintiä.

---

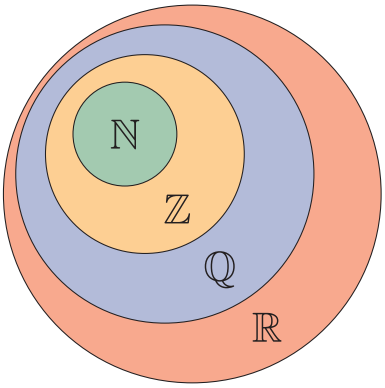
[1] Matemaattisesti täsmällisempi ja vangitseva johdatus kompleksilukuihin: *Kompleksiluvuista*, Pekka Alestalo, 2007

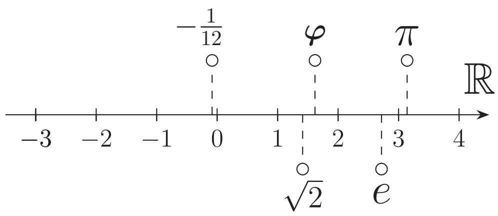
[2] Loistava You Tube-video i:n keksimisestä: *How Imaginary Numbers Were Invented*, Veritasium, 2021

[3] Kompleksilukujen historiasta yleensä: *A Short History Of Complex Numbers*, Orlando Merino, 2006

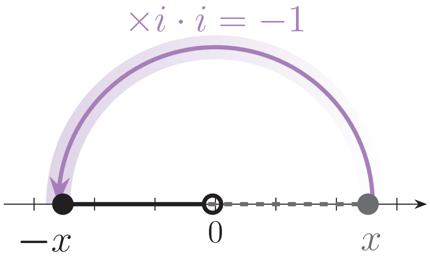
Peruskäsitteet

Tähän asti olemme sulloneet kaikki tuntemamme luvut reaalilukujen $\mathbb{R}$ kehän alle. Reaaliluvut voidaan esittää geometrisesti lukusuoran pisteiden avulla.





Vaikka emme voi asettaa imaginaariyksikköä $\boldsymbol{i}$ reaalilukujen joukkoon lukusuoralle, huomataan yksi arkinen seikka. Jos kerrotaan reaaliluku x luvulla -1 (eli kahdesti i:llä), päädymme kiepauttamaan lukumme ympäri lukusuoran "vastakkaiselle puolelle".

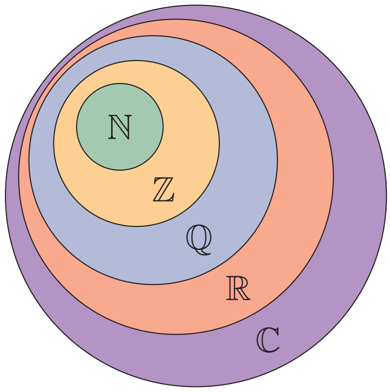


Laajennetaan imaginaariyksikön i avulla lukukokoelmaamme **kompleksiluvuilla** $\mathbb{C}$. Kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on muotoa

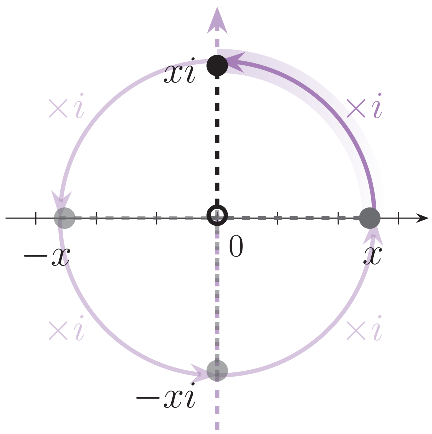
$$z = a + ib,$$

jossa luvut a ja b ovat reaalilukuja. "Vapaana" olevaa reaalilukua a sanotaan kompleksiluvun **reaaliosaksi** $\operatorname{Re} z = a$, ja i:n liitettyä *reaalilukua* b sanotaan **imaginaariosaksi** $\operatorname{Im} z = b$.

Koska mikä tahansa reaaliluku x voidaan esittää muodossa $x + i0$, voimme ajatella reaalilukujen kuuluvan kompleksilukuihin. Lukua $0 + iy$, jolla ei ole reaaliosaa lainkaan, sanotaan **puhtaasti imaginaariseksi**.



Kerran reaaliluvun kertominen kahdesti kompleksiluvulla kiepautti meidät “$180°$ ympäri” lukusuoralla, mitä jos yhdesti kompleksiluvulla kertominen vie reaaliluvun $90°$ pois lukusuoralta toiselle, puhtaasti imaginaariselle lukusuoralle? Kertomalla i:llä yhä uudestaan, jatkamme kompleksiluvun pyörittämistä tässä **kompleksitasossa**.

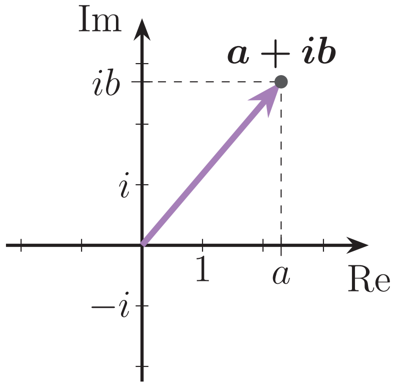


Tämän geometrisen kuvauksen avulla kompleksilukujen ominaisuudet tulevat ilmi kauniilla tavalla.

Laskutoimitukset kompleksitasossa

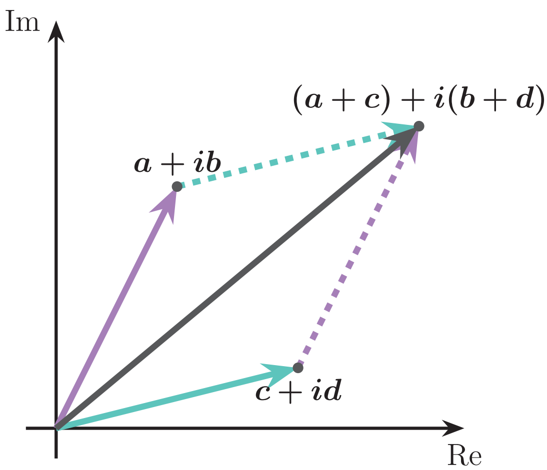
Yhteen- ja kertolasku

Kompleksitaso rakentuu reaalilukujen muodostamasta **reaaliakselista** ja imaginäärilukujen muodostamasta **imaginaariakselista**. Kompleksiluku $z = a + ib$ sijoittuu siis kompleksitasoon pisteenä (tai paikkavektorina), jonka kordinaatit ovat (a,b).



Luonnollisesti kompleksilukujen yhteenlaskussa reaaliosat ja imaginääriosat lasketaan yhteen. Kompleksilukujen $a + ib$ ja $c + id$ yhteenlasku käyttäytyy siis samalla tavalla kuin niiden kompleksitason vektoreiden yhteenlasku.

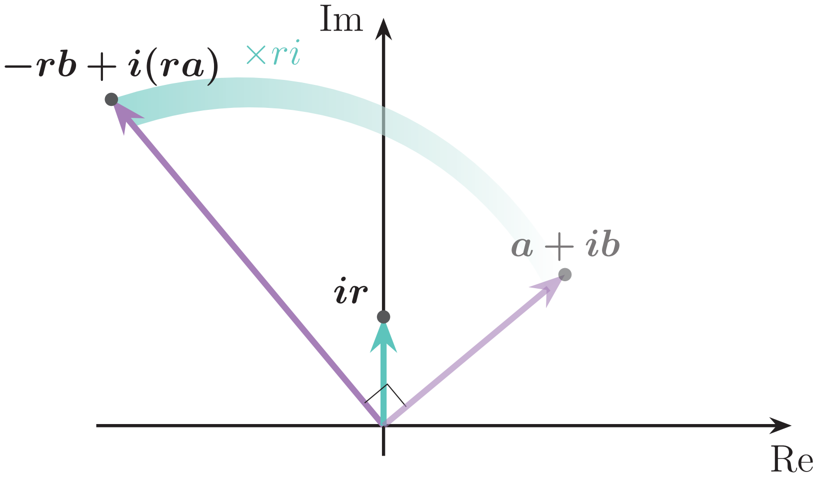
$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$



Tavallinen kertolasku voidaan luonnollisesti laajentaa kompleksiluvuille (muistamalla samalla, että $i^2 = -1$), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

Äkkiseltään voi vaikuttaa siltä, että kompleksilukujen kertolaskulla ei ole suoraa geometrista tulkintaa. Tarkastellaan siksi yksinkertaisempaa esimerkkiä, jossa kompleksiluku $z = a + ib$ kerrotaan puhtaasti imaginäärisellä luvulla ri. Reaalilukuinen r **skaalaa vektorin pituutta**, kun taas i **kääntää vektoria** (jos $r > 0$ käännytään vastapäivään, jos $r < 0$ käännytään myötäpäivään).

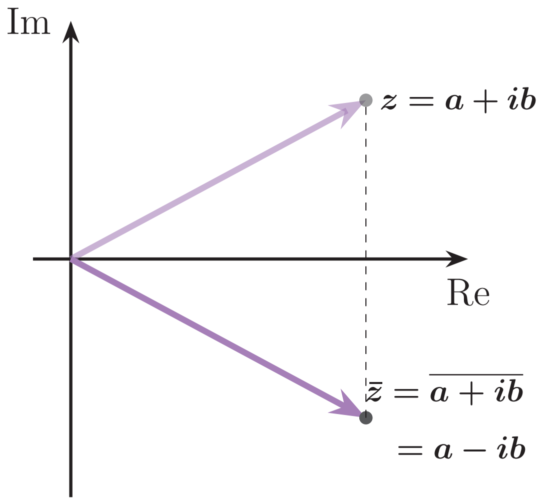


Lopputuloksena saadaan vektori, joka on skaalattu kertoimella r ja käännetty $90°$ verran vastapäivään[4]. Voisi siis kuvitella, että kompleksilukujen **kertolaskun geometrinen merkitys piilee vektorin skaalaamisessa ja pyörittämisessä**.

[4]Voit varmistua kompleksilukuja $a + ib$ ja $-b + ia$ vastaavien vektoreiden kohtisuoruudesta esim. laskemalla niiden pistetulon

Konjugaatti, moduuli ja jakolasku

Kompleksiluvun $z = a + ib$ **konjugaatti** on $\bar{z} = a - ib$, eli muuten sama kompleksiluku, mutta imaginääriosan etumerkki on vaihdettu. Konjugaatille käytetään merkintää $\bar{z}$, mutta fyysikoiden piirissä suositaan tähteä z^*. Kompleksitasossa konjugaatti $\bar{z}$ on z:n peilikuva reaaliakselin suhteen.



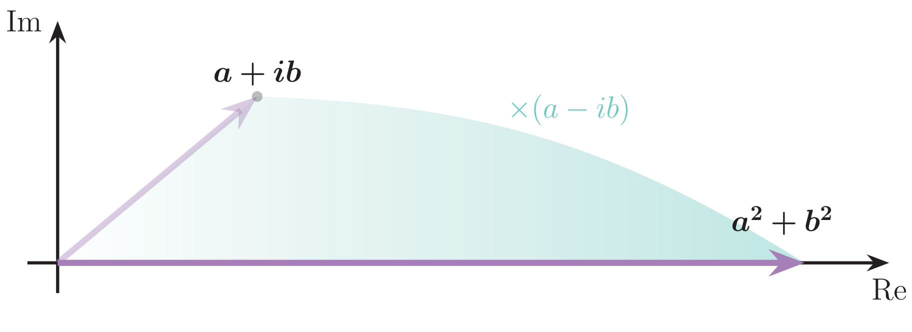
Kompleksiluvun **moduuli** on vain hienostunut termi sen “pituudelle”, eli etäisyydelle origosta. Moduulin laskemiseen sovelletaan Pythagoraan lausetta reaali- ja imaginaariosalle

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Tarkastellaan kompleksiluvun tuloa konjugaattinsa kanssa.

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + ib) \cdot (a - ib) \\ &= a^2 - iab + iab - i^2 b \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Tulo $z\bar{z}$ tuottaa siis reaaliluvun, joka osoittautuu olevan z:n moduulin neliö (eli $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$). Konjugaatilla $\bar{z}$ kertominen kiepauttaa siis z:n reaaliakselille.



Kun kyse on kompleksiluvuista, reaalilukujen parissa vanhan tutun **jakolaskun** kanssa menee sormi suuhun. Miten jakolasku on tarkoitus suorittaa?

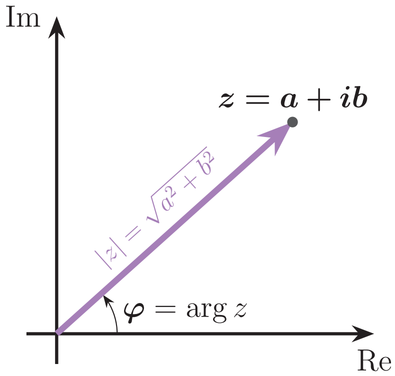
$$\frac{a+ib}{c+id}$$

Ongelma ratkeaa konjugaatin avulla. Laventamalla murtoluku nimittäjän konjugaatilla, alakertaan jää reaalinen nimittäjän moduulin neliö.

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)} \\ &= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Polaarimuoto

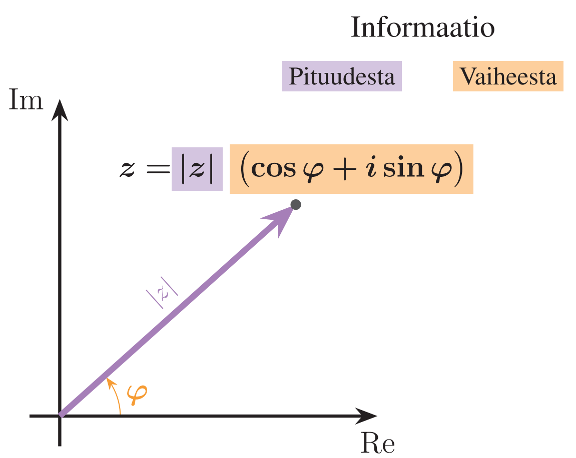
Kompleksiluvut voidaan esittää havainnollistavammalla (ja kuten kohta osoittautuu, käytännöllisemmällä) tavalla, eli **polaarimuodossa**. Polaarimuodossa kompleksiluku esitetään sen moduulin $|z|$ ja suuntakulman φ (*fii*) avulla. Kompleksiluvun z muodostamaa kulmaa φ positiivisen reaaliakselin kanssa, sanotaan z:n **argumentiksi**, tai fysiikassa tuttavallisemmin *vaiheeksi*.



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Trigonometristen funktioiden avulla kompleksiluku saadaan polaarimuotoon, jossa suuntaa ilmaisevaa yksikkövektoria[5] $\cos\varphi + i\sin\varphi$ skaalataan kertoimella $|z|$.

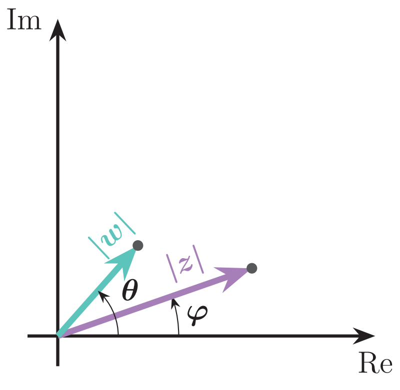
[5]Vektori, jonka pituus on yksi, $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$. Varmista trigonometrian peruskaavalla.

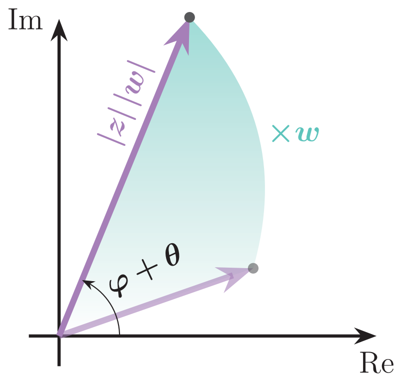


Polaarimuodossa voimme parhaiten nähdä kompleksilukujen kerto- ja jakolaskun geometrisen merkityksen. Kerrotaan kaksi kompleksilukua keskenään (toisena vaiheena θ, *theeta*)

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= |z| \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \cdot |w| \left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\
&= |z|\,|w| \left[\left(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\right) + i\left(\sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\right)\right] \\
&= |z|\,|w| \left[\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)\right]^{6}
\end{aligned}
$$

Geometrisesti kertolasku kuvaa siis kompleksiluvun z pyörittämistä täsmälleen w:n vaiheen θ verran ja skaalaamista w:n pituudella $|w|$.



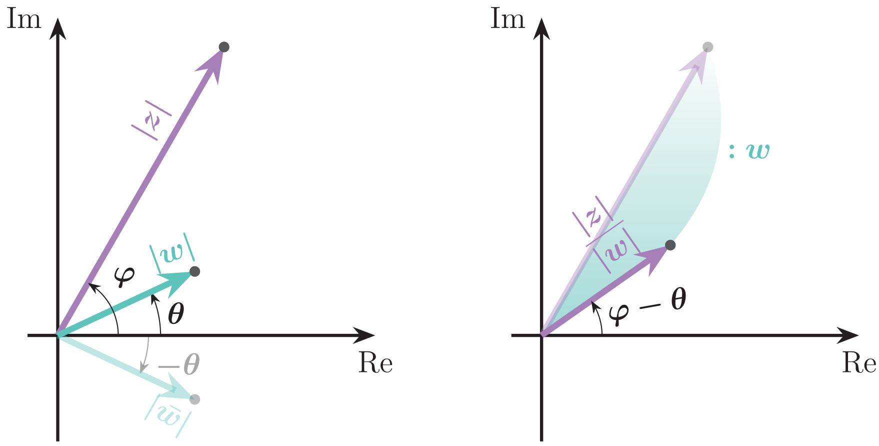


[6] Trigonometristen funktioiden summakaavat:
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
Jos nämä eivät olleet muistissa, suosittelen niiden painamista mieleen, tai jopa johtamisen yrittämistä esim. yksikköympyrän avulla.

Tarkastellaan vastaavasti jakolaskua

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} \\ &= \frac{|z|\Big(\cos\varphi + i\sin\varphi\Big)\cdot|w|\Big(\cos\theta - i\sin\theta\Big)}{|w|^2} \\ &= \frac{|z|}{|w|}\left[\Big(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\Big) + i\Big(\sin\varphi\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi\Big)\right] \\ &= \frac{|z|}{|w|}\Big[\cos\big(\varphi-\theta\big) + i\sin\big(\varphi-\theta\big)\Big]\end{aligned}$$

Geometrisesti jakolasku kuvaa siis kompleksiluvun z pyörittämistä w:n **konjugaatin** vaiheen $-\theta$ verran[7] ja skaalaamista w:n pituuden käänteisluvulla $\frac{1}{|w|}$.



Näiden tulosten osoittamiseksi meidän piti pyöritellä pitkiä laskutoimituksia ja hyödyntää trigonometrisia identiteettejä. On kuitenkin ilouutisten aika! Olen tähän asti jättänyt paljastamatta kompleksilukujen ominaisuuksista järeimmän. [8]

Eulerin lause

Yhden kaikkien aikojen merkittävimmistä matemaatikoista, Leonhard Eulerin, löytämää lausetta pidetään matematiikan kauneimpana tuloksena. Alla on kyseinen

[7] Geometrisesti on selvää, että konjugaatin $\bar{w}$ vaihe on $-\theta$. Mutta tuloksen voi osoittaa vastaavan konjugaatin määritelmää:

$$|w|\,\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big) = |w|\,\big(\cos\theta - i\sin\theta\big) = |w|\,\overline{\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)} = \bar{w}$$

[8] Tämä matemaattinen tulos on niin ihmeenomainen, että mahdollisesti jonkun mielestä teimme kaiken tämän työn turhaan. Päinvastoin, sillä kuten Uncle Ben kuuluisasti lausahti: “With great power comes great responsibility.” Ja ennen kuin käytämme tätä voimakasta kaavaa, oli ensin saatava kunnollinen ymmärrys mitä sen koukeroiden taustalla tapahtuu.

kaava[9] pläjäytettynä kaikessa loistossaan:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Eulerin lauseen perusteella kompleksiluvun polaariesitys voidaan pakata yhteen eksponenttiin, jonka kantalukuna on Neperin luku $e = 2{,}71828\ldots$. Unohdetaan äimistely hetkeksi, ja varmistetaan, että Eulerin lause toteuttaa tuntemamme eksponettien ja kompleksilukujen lainalaisuudet.

1. Nollas potenssi: $e^0 = 1$

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i0 = 1$$

2. Potenssien tulo: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= \Big(\cos\varphi + i\sin\varphi\Big) \cdot \Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big) \\ &= \cos\big(\varphi + \theta\big) + i\sin\big(\varphi + \theta\big) \\ &= e^{i(\varphi+\theta)}, \end{aligned}$$

3. Potenssien jakolasku: $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\theta}} &= \frac{\Big(\cos\varphi + i\sin\varphi\Big)}{\Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big)} \\ &= \cos\big(\varphi - \theta\big) + i\sin\big(\varphi - \theta\big) \\ &= e^{i(\varphi-\theta)}, \end{aligned}$$

4. Kompleksiluvun konjugaatilla on vastakkainen vaihe $\arg\bar{z} = -\arg z$

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\varphi}} &= \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} \\ &= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \\ &= e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

[9] Virallisesti "kauneimman tuloksen"muoto saadaan sijoituksella $\varphi = \pi$, jolloin tulos sievenee muotoon $e^{i\pi} + 1 = 0$

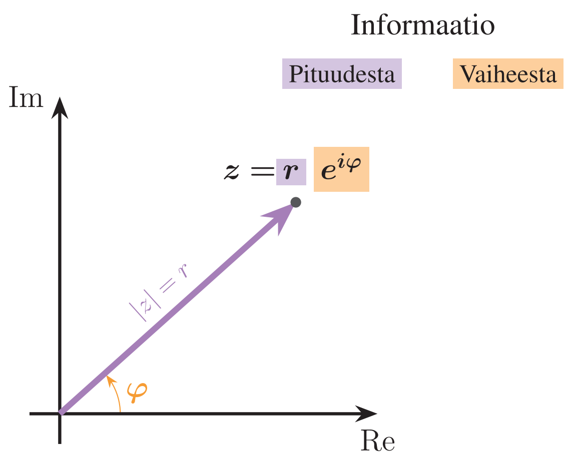
5. Kompleksiluvun moduuli $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$$\begin{aligned} \left|e^{i\varphi}\right| &= \sqrt{e^{i\varphi}e^{-i\varphi}} \\ &= \sqrt{e^0} \\ &= 1 \\ &= |\cos\varphi + i\sin\varphi| \end{aligned}$$

Tämä siis tarkoittaa, että $|re^{i\varphi}| = |r|$

Eulerin kaava siis toteuttaa kaikki havaitsemamme kompleksitason polaarimuodon ominaisuudet.

Eksponenttimuodon avulla kompleksiluvun vaihe on kokonaan pakattu kompleksiseen eksponenttiin $e^{i\varphi}$, ja pituus on kokonaan pakattu kertoimeen $|z| = r$.



Eksponenttimuodossa kompleksilukujen väliset laskutoimitukset ovat yhtäkkiä hyvin suoraviivaisia, ja niiden geometrinen kuvaus tulee ilmi intuitiivisella tavalla (kts. lunttilappu).

Kosini ja sini

Tulet kursseillasi jatkuvasti törmäämään seuraavaan kahteen kaavaan, joissa vanhat tutut, kosini ja sini esitetään hyvin kummallisella tavalla:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i2}$$

Voimme toki varmentaa yhteyden laskennallisesti Eulerin kaavan sijoituksella

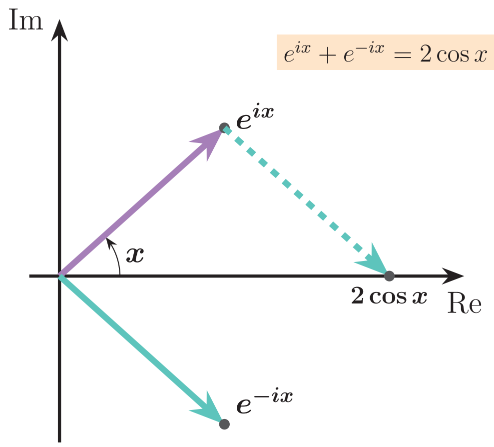
Kokeile ensin itse, ja varmista vastaus päälläseisonnan avulla

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} = \frac{\cos x + i\sin x + \cos(x) - i\sin(x)}{2} = \frac{2\cos x}{2} = \cos x$$

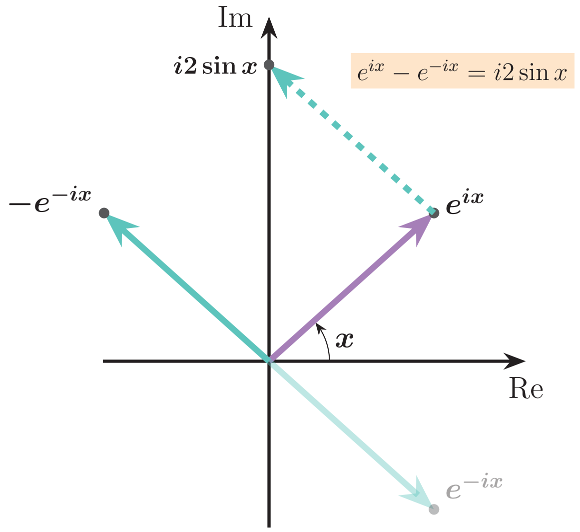
$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i} = \frac{\cos x + i\sin x - \cos(x) + i\sin(x)}{2i} = \frac{i2\sin x}{2i} = \sin x$$

Mutta kaavoille löytyy intuitiivinen geometrinen merkitys, jonka avulla ne jäävät elävästi muistiin.

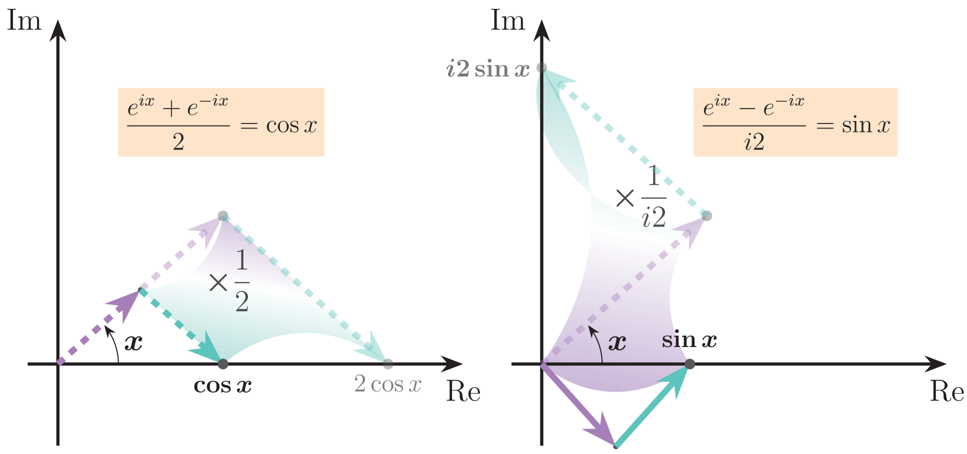
Kun summaamme kompleksiluvun e^{ix}, jonka vaihe on x, sen konjugaattinsa e^{-ix} kanssa, lopputuloksena on reaaliakselilla kaksinkertainen reaaliosa, eli $2\cos x$.



Kun vähennämme kompleksiluvusta e^{ix} sen konjugaatin e^{-ix}, lopputuloksena on imaginääriakselilla kaksinkertainen imaginääriosa, eli $i2\sin x$.



Eli saamme haluamamme $\cos x$:n skaalaamalla summan $e^{ix} + e^{-ix}$ puolella, ja haluamamme $\sin x$:n skaalaamalla erotuksen $e^{ix} - e^{-ix}$ puolella ja kiertämällä sen reaaliakselille.



Käy nämä geometriset kuvaukset huolella läpi, ja ne painuvat mieleesi melkeinpä itsestään. Samalla tavalla voit varmistaa (sekä laskennallisesti, että geometrisesti), että oikeastaan mille tahansa kompleksiluvulle $z = a + ib$ pätee

$$\operatorname{Re} z = a = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = b = \frac{z - \bar{z}}{i2}$$

Selvisit maaliin! Olet nyt oppinut fuksivuodelle tarvittavat perusteet kompleksiluvuista!

Kompleksiluvut fuksivuoden kursseilla

Saatat pohtia millä kursseilla tulet törmäämään kompleksilukuihin. Lyhyt vastaus on: kaikkialla. Kompleksiluvut ovat äärimmäisen hyödyllisiä, oli kyse sitten matematiikasta, fysiikasta tai jopa tietokonegrafiikasta. Alla on kuvailtu fuoksivuoden kolme merkittävää kohtaamista kompleksilukujen kanssa.

Differentiaaliyhtälöt

Ensimmäinen virallinen kohtaaminen on differentiaaliyhtälöiden parissa. Kompleksilukujen tarve ilmenee nopesti, kun tarkastellaan erään sovellusten kannalta äärimmäisen tärkeän yhtälötyypin ratkaisemista

$$y'' + by' + cy = 0 \qquad b,c \in \mathbb{R}$$

On äärimmäiseen hankalaa suoraan päätellä minkä tyyppinen funktio ratkaisee kyseisen differentiaaliyhtälön. Lupaava kandidaatti on funktio $y(x) = e^{\lambda x}$, jossa λ on jokin tuntematon vakio. Tämä siksi, että kun $e^{\lambda x}$:ää derivoidaan funktiomme pysyy entisellään, mutta eteen ilmestyy kerroin λ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

Derivoimalla yhä uudelleen ja uudelleen, $e^{\lambda x}$ pysyy muuttumattomana, mutta eteen putkahtelee jokaisella derivoimiskerralla uusi λ-kerroin.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Yleensä kun sijoitamme jonkin *yritteen* differentiaaliyhtälöön, derivoinnit muuttavat funktiomme täysin erilaiseen muotoon. Mutta sijoituksella $e^{\lambda x}$ saammekin summan samasta funktiosta $e^{\lambda x}$ eri vakiokertoimilla.

$$\begin{aligned}
(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + c(e^{\lambda x}) &= 0 \\
\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} &= 0 \\
\left(\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} &= 0 \qquad \| \; e^{\lambda x} > 0 \\
\lambda^2 + b\lambda + c &= 0
\end{aligned}$$

Yhtälö siis ratkeaa löytämällä sopivan vakion λ, jolla yllä olevan **karakteristisen yhtälön** arvoksi tulee nolla. Tämä taas on jo helppoa tutun ratkaisukaavan avulla

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Jos saamme juuriksi kaksi reaalilukua $\lambda = r_1$ ja $\lambda = r_2$, ovat differentiaaliyhtälön ratkaisut siten $e^{r_1 x}$ ja $e^{r_2 x}$. Esimerkiksi yhtälön $y'' + 4y' + 3y = 0$, ratkaisut ovat e^{-3x} ja e^{-x}.

Kompleksiluvut astuvat kuvioihin, jos yritämme ratkaista yksinkertaiselta näyttävän differentiaaliyhtälön

$$y'' + y = 0$$

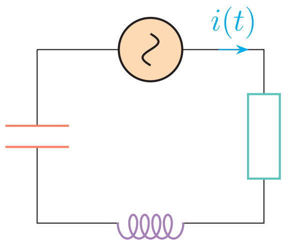
Karakteristisen yhtälön juuret ovat $\lambda = \pm\sqrt{-1}$. Tämä merkitsisi, että yhtälön ratkaisut ovat e^{ix} ja e^{-ix}, mikä ei näytä paljastavan meille ratkaisun fysikaalisesta luonteesta mitään.

Väärin! Huomaa, että äskeinen yhtälö ratkeaa myös yritteillä $y = \sin x$ ja $y = \cos x$. Kompleksieksponentti kytkeytyy siis vahvasti trigonometrisiin funktioihin, ja differentiaaliyhtälöt kuiskivat vihjeitä meille tästä yhteydestä.

Salaisuuden takana on Eulerin kaava, ja lisää paljastuu kursseilla *Differentiaali- ja integraalilaskenta 1*- ja *Yliopistofysiikan perusteet*.

Virtapiirit

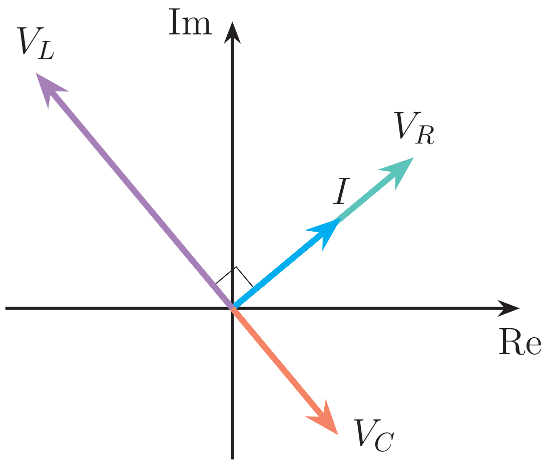
Kun virtapiireihin kytketään *vaihtovirta*, Ohmin ja Kirchhoffin lakien mukavat yhtälöryhmät muuttuvatkin monimutkikkaiksi differentiaaliyhtälöiksi. Vastusten, kondensaattorien ja käämien käyttäytymisen selvittämiseksi on ratkaistava niin monta differentiaaliyhtälöä kuin virtapiirissä on silmukoita.



$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = v_0 \omega \cos(\omega t)$$

Vaihtovirtapiirien kontekstissa i tarkoittaa sähkövirtaa $i(t)$ ajan funktiona. Siksi sähköinsinöörit käyttävätkin imaginääriyksikölle j kirjainta. Sähköinsinöörille j on kuitenkin yhtä tärkeä kuin i.

Kaikkien opiskelijoiden helpotukseksi virtapiirianalyysi yksinkertaistuu huomattavasti *phasoreiden* avulla. Phasorit ovat kompleksilukuja, jotka toimivat geometrisina aputyökaluina siniaaltoisten suureiden mallintamisessa. Kuvitteelliset phasorit pyörivät kompleksitasossa, ja virtapiiristä mittaamamme komponenttien sinimuotoiset jännitteet (ja virrat) ovat phasoreiden projektioita reaaliakselilla.



Tulet tutustumaan phasoreihin *Sähkömagnetismi*-kurssilla RLC-piirien ja sähkömagneettisten aaltojen parissa.

Kvanttimekaniikka

Kevään puolella kohtaat kuuluisan Schrödingerin yhtälön, jonka symbolisekamelskan kärjestä voit bongata meidän i:mme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\Psi$$

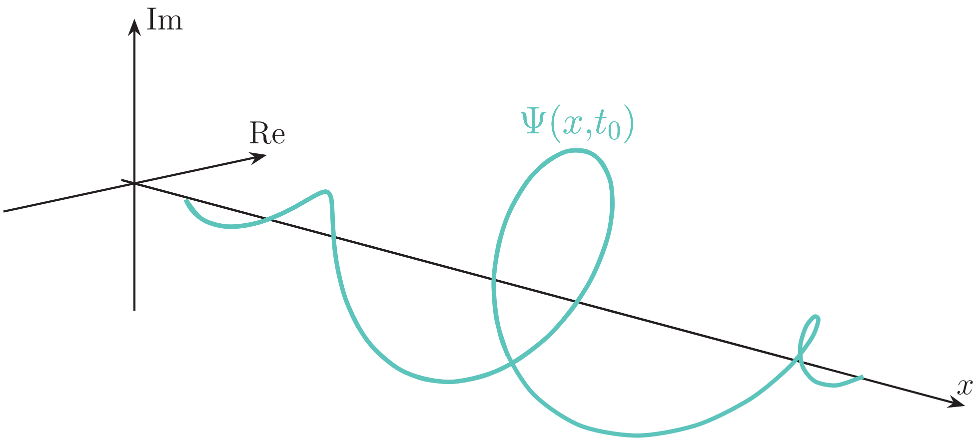
Kyseinen yhtälö sai alkunsa 1920-luvulla ilmaantuneesta aalto-hiukkasdualismi hypoteesista. Sen mukaan sähkömagneettisella säteilyllä ja aineella on sekä aaltoliikkeen, että hiukkasten ominaisuuksia. Kerran elektronilla on hiukkasena aaltoliikkeen luonnetta, sen pitäisi toteuttaa jokin **aaltoyhtälö**[10]. Tästä inspiroituneena Schrödinger johti yhtälönsä, jonka ratkaisevat aaltofunktiot Ψ kuvaavat elektronin tilaa.

Ennen Schrödingerin yhtälöä kompleksilukujen rooli fysiikassa oli vain matemaattisina aputyökaluina. Ne eivät esiintyneet missään fysiikan pelisäännöissä, sillä kompleksiluvut eivät kuvaa mitään mitattavaa suuretta. Kuitenkin Schrödingerin

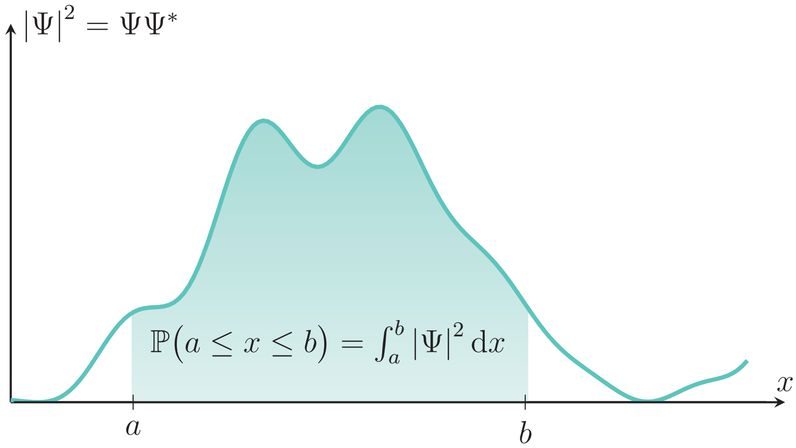
[10] Klassisille aalloille voidaan osoittaa aaltoyhtälö, jota ne noudattavat. Esimerkiksi yhdessä paikkaulottovuudessa liikkuvat aallot noudattavat *osittaisdifferentiaaliyhtälöä*:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

aaltoyhtälössä i:n käyttämiseltä ei voida välttyä, jonka vuoksi kaikki ratkaisut Φ ovat kompleksiarvoisia.



Mitä ihmeessä Schröindgerin yhtälön ratkaisut kertovat elektronista, kerran niiden arvot eivät kuvaa mitään mitattavissa olevaa reaalista suuretta? Nykyään vallitsevan tulkinnan tarjosi Max Born, joka yhdisti aaltoyhtälön **todennäköisyyteen**. Born ehdotti, että aaltofunktion pituuden neliö $|\Psi|^2 \in \mathbb{R}$ kuvaisi todennäköisyystiheyttä, jonka määrittämällä todennäköisyydellä elektroni löytyy mittauksissa tietyltä alueelta.



Kompleksiluvut vaikuttavat siis olevan välttämättömiä mikroskooppisen maailman todellisen luonnon kuvaamiseen, eivätkä ole ainoastaan työkaluja laskujen helpottamiseksi. Kompleksisiin aaltofunktioihin ja muihin kvanttimaailman kummallisuuksiin pääset syventymään *Aine ja rakenne*-kurssilla.

Ja paljon muuta

Alle on vielä kerätty pieni listaus kursseista, joilla kompleksiluvuilla on olennainen rooli:

- *Matriisilaskenta*
- *Kvanttimekaniikka*
- *Partial differential equations*
- *Fourier analyysi*
- *Kompleksianalyysi* (duh)
- *Linear Algebra*

Kysymykset ja korjausehdotukset: `nikolai.argatoff@aalto.fi`