

Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Hyviä Youtube-videoita, nettisivuja sekä ratkaisumetodeja

Lauri Sääskilahti

Johdanto

Näiden materiaalien tarkoituksena on toimia tukena Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 –kurssin oppikirjamateriaaleille. Materiaalit koostuvat linkeistä Youtube-videoihin ja nettisivuille, näiden selitteistä ja allekirjoittaneen hahmottelemista yleisistä ratkaisumetodeista joihinkin tehtävätyyppeihin sekä muista huomioista.

Videolinkkien tarkoitus on ollut erityisesti tuoda visualisointia kurssin aiheista, mikä on muissa oppimateriaaleissa jäänyt rajalliseksi. Videolinkit on kerätty täydentämään luentomateriaaleissa käytyjä aiheita, ei opettamaan samaa asiaa uudestaan, vaikka netissä hyviä opetusvideoita onkin. Videoita on lyhyesti luokiteltu aiheen mukaan, mikä helpottaa suuntamaan energian niihin kohtiin, joiden hahmottamisessa opiskelijalla on vaikeuksia. Kaikista aiheista olen pyrkinyt ottamaan esille ainakin yhden hyvän videon. Tämä toivon mukaan innoittaa myös omatoimiseen tiedonhankintaan.

Muutamia Youtube-kanavia, jotka tulevat useasti vastaan materiaaleissa ja joita allekirjoittanut voi muutenkin suositella ovat Khan Academy, 3Blue1Brown ja Eddie Woo. Nettisivuista taas Paul's Online Notes (<http://tutorial.math.lamar.edu/>) ja Khan Academy (<https://www.khanacademy.org/> erityisesti -> Math -> AP® Calculus AB & AP® Calculus BC) ovat hyviä, ja sivustoilta löytyy myös kurssiin valmistavaa kertausmateriaalia.

Materiaaleissa esitetyt ratkaisumetodit on tehty ajatuksena ikään kuin kansankielisesti selittää isoja ajatusmalleja joidenkin kurssin aiheiden taustalla. Tällä on pyritty ottamaan vähän etäisyyttä yksityiskohtiin ja näkemään iso kuva taustalla, mikä omasta kokemuksestani usein jää opiskelijoilta huomaamatta, mutta kuitenkin hyödyttäisi eniten. Nämä on laadittu toisen opiskelijan näkökulmasta ja ajatusmaailmasta, mistä toivon jäävän jotain käteen myös niille opiskelijoille, joille lehtorien luennot muistuttavat jokseenkin muinaishepreaa.

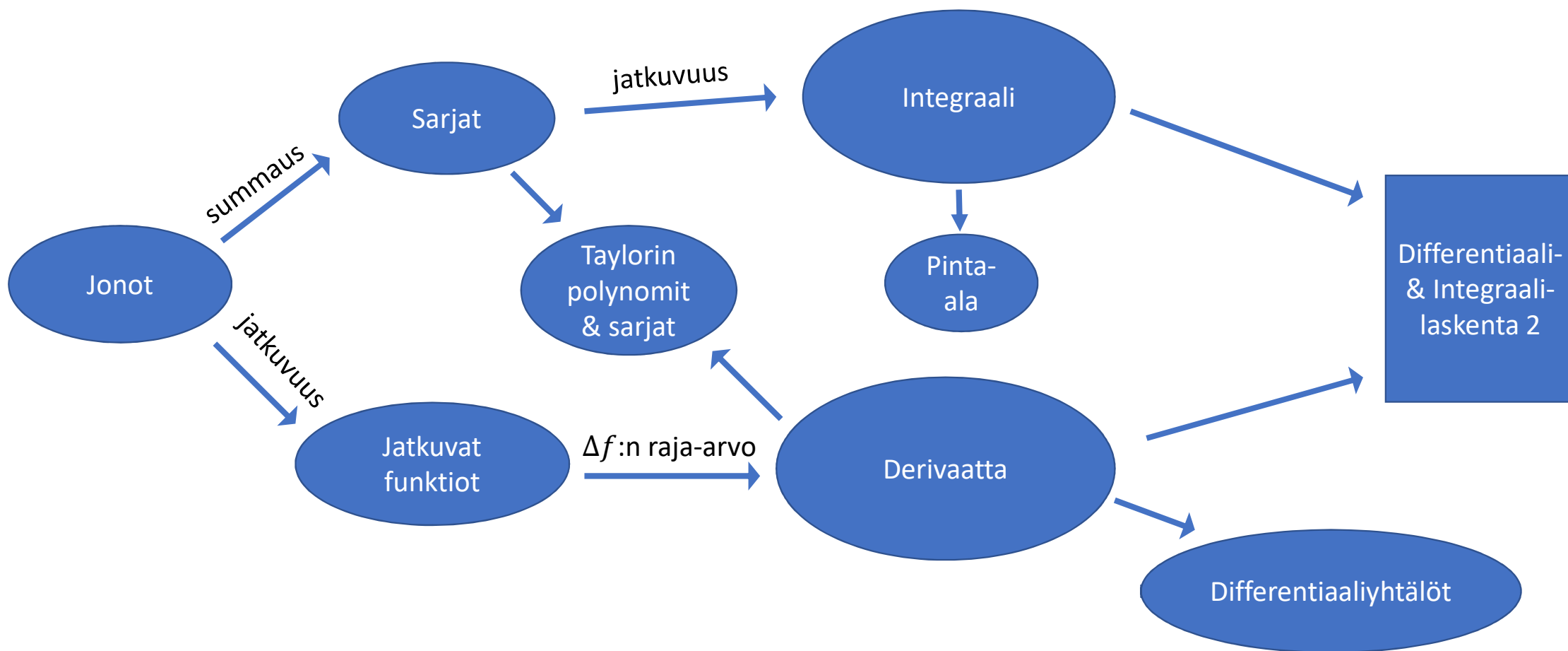
Mikäli materiaaleissa esiintyy epäselvyyksiä tai ristiriitaisuuksia, pyydän ilmoittamaan näistä kurssin pääassistentille tai luennoitsijalle.

Lauri Säaskilahti

Otaniemessä, kesällä 2019

Ajatuskartta kurssin sisällöstä

© Lauri Säaskilahti



Matemaattisten ongelmien ratkaisutapa

- I: Lue tehtävänanto kerran kokonaisuudessaan läpi. Lue vielä toistamiseen. Varmista, että ymmärsit kysymyksen oikein (tässä vaiheessa tehdään suurimmat virheet!). Kysy epäselvät asiat assistentilta/kaverilta. Tarvittaessa etsi tietoa internetistä.
- II: Toista vaihe I riittävän monta kertaa.
- III: Piirrä kuvaaja, sillä laadukas kuvaaja usein jo ratkaisee tehtävänannon puolestasi. Puritanistinen matemaatikko voisi pitää tätä epärehellisenä vippaskonstina, mutta on oikeasti vain hyvää insinööritaitoa (!). Määritä myös matemaattinen muoto sanallisille tehtävänannoille.
- IV: Suorita tehtävän vaatimat laskuoperaatiot.
- V: Sanity check. Kysy itseltäsi onko vastaus odotuksiesi mukainen ja muutenkin järkevä. Jos ei, selvitä onko syy laskuissa vai lähtöoletuksissasi.
 - Apuna ”järkevien ratkaisujen” rajaamisessa voi käyttää yleisiä matemaattisia faktoja (esim. geometriset mitat eivät ole negatiivisia) sekä tehtävänannosta ilmeisiä rajoituksia (esim. tehtävässä kysytty yrityksen liikevoitto ei voi ylittää liikevaihtoa, tällöin voitto-% olisi $> 100\%$, kun max. = 100%)
- VI: Lue vielä tehtävänanto ja huolehdi, että vastaat nimenomaan siihen mitä kysyttiin.
- VII: Ilmoita vastaus tehtävänannon pyytämässä muodossa.

Jonot

- <https://www.youtube.com/watch?v=KRFiAlo7t1E> – Matalan tason kertausta jonoista (8 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=lfZGtjSWcQs> – Jonon suppeneminen (5 min)

Sarjat

- <https://www.youtube.com/watch?v=1ylnzfzDDKY> – Hajaantumistesti (1, ks. seur. dia) (8 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=av947KCWf2U> – Suhdetesti (2) (9 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=0tXxFPHzFFI> – Majoranttiperiaate (3) (4 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=yudhkUUzAgY> – Ajatuksia herättävä Grandin sarja (9 min). Huomaa, että kyseessä on Cesàron summauksella saatu osasummien *aritmeettisen keskiarvon* raja-arvo äärettömyydessä, eikä tulos ole sarjan yksikään *osasumma* (ks. Lisää https://en.wikipedia.org/wiki/Ces%C3%A0ro_summation)
- <https://www.youtube.com/watch?v=L-JqHo4-W4k> – Kaikki perusjutut jonoista ja sarjoista lyhyesti tiivistettynä (10 min)

Sarjojen suppenemisen tutkimisen metodi

- I: Suppeneeko vastaava jono a_n kohti nollaa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$? (1)

Kyllä

Ei

Jono ja sitä vastaava sarja hajaantuvat

II a): Suhdetesti (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$$

Jos $0 \leq q < 1 \Rightarrow$ suppenee

$q = 1 \Rightarrow$ täytyy käsitellä erikseen

$q > 1 \Rightarrow$ hajaantuu

TAI



II b): Majorantti/minorantti-periaate (3)

$$\text{Olkoon } Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Jos Z_n suppenee ja $|a_n| \leq z_n \forall n \Rightarrow a_n$

suppenee.

Sama käänteisesti hajaantumiselle

Suppenevankin sarjan varsinaisen arvon määrittäminen

äärettömydessä on usein hankalaa, mutta esim.

suppiloperiaatteella (yhdistetty majorantti & minorantti) se voi olla mahdollista laskea

Jatkuvuus ja raja-arvo

- <https://www.youtube.com/watch?v=riXcZT2ICjA> – Johdatus raja-arvoihin (11 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=kdEQGfeCOSE> – Jatkuvuus raja-arvon avulla (11 min)
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/Continuity.aspx> – Jatkuvuus

Derivaatta

- <https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=2&t=0s> – Selittää erittäin hyvin infinitesimaalisuuden käsitteen, joka on yksi analyysin perustavanlaatuisimmista ajatuksista (17 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=9vKqVkJMQHk> – Derivaatta (18 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=kfF40MiS7zA&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=7> – Derivaatan virallinen määritelmä, raja-arvo ja L'Hospitalin sääntö (18 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=PdSzruR5OeE&list=PL19E79A0638C8D449&index=38> – L'Hospitalin sääntö (9 min)
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/LinearApproximations.aspx> – Lineaarinen approksimointi

Taylor-polynomit ja -sarjat

- Korkein potenssi kertoo Taylor-polynomin asteen, EI termien lukumäärä
- <https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjlBzJ4&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=12&t=0s> – Taylorin polynomi (22 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=AFMXixBVP-0> – Visualisointia (6 min)

Newtonin menetelmä

- Newtonin menetelmä on perustavanlaatuinen algoritmi numeerisessa laskennassa. Sen perusajatuksista on paljon variaatioita ja käyttökohteita on valtava määrä.
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/NewtonMethod.aspx>
- https://www.youtube.com/watch?v=PIPiv6gn_Ls – Esimerkki algoritmin käyttämisestä (12 min)

Funktio ja käänteisfunktio

- <https://www.youtube.com/watch?v=pg827uDPFqA> – Kaikille, jotka ovat ihmetelleet Neperin luvun luonnetta (8 min)
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/InverseFunctions.aspx> - Käänteisfunktio
- <https://www.youtube.com/watch?v=W84lObmOp8M> – Käänteisfunktio (9 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=j3f88V9M0qM> – Lyhyesti miten käänteisfunktioita määritetään (3 min)
- https://www.youtube.com/watch?v=Z5myJ8dg_rM – Kertausta logaritmeista (7 min)

Integraali

- <https://www.youtube.com/watch?v=rfG8ce4nNh0&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=9&t=0s> – Integraali yksityiskohtaisesti selitettynä (20 min)
- https://www.youtube.com/watch?v=iC9GtXYeULQ&list=PLX2gX-ftPVXXVfuT3Fg_x1rtrivBLc7r2&index=8 – Yksityiskohtainen esimerkki integraalin käytöstä (6 min)
- https://www.youtube.com/watch?v=4bZyfvKazzQ&list=PLVwvyzz17cDLZ-5_wm7mNh86T0cmPLW2T – Pinta-ala käyrien välissä (4 min)
- https://www.youtube.com/watch?v=QLHJl2_aM5Q – Tilavuuden laskeminen integraalilla (11 min)
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ImproperIntegrals.aspx> – Epäoleellinen integraali

Integroimismenetelmät

- https://www.youtube.com/watch?v=dh_n9FVKA0&list=PLVwvyzz17cDI9d-P8FN69xr2zDz4bSuHF&index=1 – Osittaisintegrointi
- <https://www.youtube.com/watch?v=b76wePnIBdU&list=PLVwvyzz17cDI9d-P8FN69xr2zDz4bSuHF&index=7> – Sijoitusmenetelmä
- <https://www.youtube.com/watch?v=7IkufOBlw5g&list=PLVwvyzz17cDI9d-P8FN69xr2zDz4bSuHF&index=30> – Osamurtohajotelma
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/IntegrationStrategy.aspx> – Integroimisstrategiasta, hyvä lähestymistapa systemaattiseen integroimiseen
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/IntTechIntro.aspx> – Laaja aineisto integroimismenetelmistä, kaikki eivät kuulu kurssialueeseen

Differentiaaliyhtälöt

- https://www.youtube.com/watch?v=p_di4Zn4wz4 – Hyvin visuaalinen ja yksityiskohtainen esitys mitä DY:t ovat (27 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=5mHKirsbdgY&list=PLX2gX-ftPVXV10J9jL1Lb46pPQVgBbL4Q&index=2> – Muutama tosielämän esimerkki DY:iden käytöstä (4 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=6o7b9yyhH7k> – Vähän johdattelua differentiaaliyhtälöihin matematiikkaan (8 min)
- https://www.youtube.com/watch?v=Ltmiq_xeLs&list=PLX2gX-ftPVXV10J9jL1Lb46pPQVgBbL4Q&index=11 – Suuntakenttä (5 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=LoaagZPWvpM> – Suuntakenttä (7 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=q87L9R9v274> – Eulerin menetelmä DY:iden numeeriseen ratkaisuun (10 min)

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmä

- I: Tunnista tyyppi: kertaluku, vakiokertoiminen?, separoituva/lineaarinen/muu?, homogeeninen/epähomogeeninen?
- II: Etsi kyseisen DY-tyyppin ratkaisukaava
- III: Sovella ratkaisukaavaa. Pisin ja työläin vaihe
- IV: Huomioi alkuarvoehdot
- V: Ilmoita saatu vastaus

Erilaisia tavallisia DY-tyyppejä

- <https://www.youtube.com/watch?v=3n3UitPMP5I&list=PLJ8OrXpbC-BO2zEW58TpHHakh5nodn3-i&index=2> – 1. asteen lineaarinen DY (9 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=DL-ozRGDIkY> – Separoituva DY (9 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=h3SCtTtICKU> – Esimerkki 2. asteen lineaarinen DY:n ratkaisemisesta (21 min)

Kokonaisia videosarjoja/nettikursseja syvemmin differentiaaliyhtälöistä kiinnostuneille

- Seuraavissa materiaaleissa on paljon asiaa, mikä ei kuulu kurssisisältöön, ja ne sopivat opiskelijoille, jotka haluavat syventää osaamistaan yli kurssivaatimusten
- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx> – Paul’s Online Notes
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDNPOjrT6KVIfJuKtYTftqH6> – 3Blue1Brownin videosarja, erityisen visuaalisesti havainnollinen
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLX2gX-ftPVXV10J9jL1Lb46pPQVgBbL4Q> – Michel van Biezenin aloittelijatason videosarja DY:hin. Samalta tekijältä löytyy myös vaativampia videosarjoja aiheesta
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PL96AE8D9C68FEB902> – Khan Academyn videosarja, osa videoista valitettavasti hieman huonolla resoluutiolla

Nettisivuja

- <http://tutorial.math.lamar.edu/> – Erittäin hyvä ja suositeltava sivu. Calculus I ja Differential Equations erityisesti sopivat tälle kurssille, joissa kattavia selityksiä *Notes* -kohdassa. *Practice Problems*issa voi harjoitella lisää
- http://tutorial.math.lamar.edu/Extras/CheatSheets_Tables.aspx#CalcSheet – Edelliseltä sivustolta lyhyitä ”luntilappuja” differentiaalilaskennan osaluista
- <http://mathworld.wolfram.com/topics/Calculus.html> – Kattava ja tieteellisesti hyvin luotettava sivusto, jolta löytyy artikkeleita kaikista aiheista. Harmillisesti artikkelit ovat melko tynkiä, ja soveltuvat huonosti opiskelemiseen. Kertaamiseen ja kaavojen tarkistamiseen soveltuvat paremmin
- <http://mathonline.wikidot.com/calculus> – Luotettava, artikkelit kuitenkin kohtuullisen suppeita, eikä siksi sovellu yksinään hyvin oppimateriaaliksi

Muuta hauskaa ja miltei-hyödyllistä

- <https://www.youtube.com/watch?v=P913qwtXihk> – Luvun -1/12 mysteeri (9 min)
- <https://www.youtube.com/watch?v=tt2DGYOi3hc> – Eddie Woo selittää differentiaali- & integraalilaskennan taustoja (12 min)
- <https://matlabacademy.mathworks.com/> - ”Solving Ordinary Differential Equations with MATLAB” opettaa perusteita differentiaaliyhtälöistä ja samalla niiden ratkaisemisesta MATLABilla. Aallon opiskelijat voivat rekisteröidä itselleen käyttäjän yliopiston lisenssillä