

Viikon aiheet liittyvät **Alkeisfunktioihin, derivointiin ja integrointiin**. Harjoitustehtäviin liittyvää materiaalia löytyy kurssikirjasta **Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition) 3., 4., 5. ja 6.**

Alkuviikko

1. Oletetaan, että epidemiaan sairastuneiden määrää mallintaa logistinen funktio f , joka määräytyy ehdosta

$$f(t) = \frac{L}{1 + Me^{-kt}},$$

missä t mittaa aikaa kuukausina epidemian puhkeamisen havaitsemisesta. Alussa havaittiin 200 sairastunutta ja kuukaudessa sairastuneiden määrä nousi 1000:n. Lopulta sairastuneita oli 10000.

- Määrää parametrien L , M ja k arvot.
 - Kuinka moni oli sairastunut kolmen kuukauden aikana epidemian puhkeamisen havaitsemisesta lähtien?
 - Kuinka nopeasti sairastuneiden lukumäärä kasvoi kolmen kuukauden kohdalla?
2. Olkoon f pisteessä $x = 0$ jatkuva funktio, joka toteuttaa epäyhtälöt

$$\frac{x}{\ln(1+x)} \leq f(x) \leq \frac{e^x - 1}{x}$$

origon ympäristössä. Määrää $f(0)$.

3. Millä vakion k arvoilla raja-arvo

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3x} \cosh kx$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh kx}{\cosh 2x}$

on äärellinen?

4. Määrää funktion $x \mapsto xe^{-x}$ ääriarvokohdat ja käännepisteet. Piirrä kuvaaja.

Loppuviikko

Taulutehtävät

1. Kahden pylvään väliin kiinnitetty voimalinja roikkuu ehdon

$$f(x) = \frac{T}{\omega} \cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$$

määräämän funktion graafin muotoisena ketjukäyränä. Vakio T esittää kaapelin jännitystä käyrän matalimmassa pisteessä ja ω on kaapelin paino pituusyksikköä kohti.

- (a) Oletetaan, että kaapeli on kiinnitetty muuttujan $x = -T/\omega$ ja $x = T/\omega$ arvoja vastaaviin pisteisiin. Määrää käyrän 'notkolle' (= käyrän korkeimman ja matalimman pisteen välinen erotus) lauseke.
- (b) Osoita, että f toteuttaa yhtälön

$$f''(x) = \frac{\omega}{T} \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

2. 90°C -asteinen kahvi laitetaan 20°C -asteiseen huoneeseen alkuhetkellä $t = 0$. Kahvin lämpötila muuttuu nopeudella $r(t) = -7e^{-0,1t}^\circ\text{C}$ minuutissa, kun aika t esitetään minuutteina. Arvioi kahvin lämpötila 10 minuutin kuluttua.
3. Vuonna 2010 Meksikon väestö kasvoi $1,1\%$ vuodessa. Oletetaan, että sama kasvunopeus jatkuu tulevaisuuteen ja muuttuja t esittää aikaa vuosina vuodesta 2010 alkaen. Tällöin Meksikon väestö voidaan esittää (miljoonina) ajan funktiona muodossa $P(t) = 112(1,011)^t$.
- (a) Arvioi Meksikon keskimääräinen väestö vuosien 2010 ja 2050 välillä.
- (b) Määrää vuosien 2010 ja 2050 väestöjen keskiarvo.
- (c) Mistä johtuu (a) ja (b) kohtien vastausten ero?

Palautettavat tehtävät

4. Määrää integraalit

- (a) $\int x \sin x dx$
- (b) $\int x^2 \sin x dx$
- (c) $\int (\ln x)^2 dx$
- (d) $\int \frac{x}{e^x} dx$

5. Määrää seuraavat integraalit jos ne suppenevat.

(a) $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

(c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

6. Osoita sopivan sijoituksen avulla, että seuraavat integraalit ovat samoja.

(a) $\int_0^{\pi/3} 3 \sin^2(3x) dx = \int_0^\pi \sin^2(y) dy$

(b) $\int_1^e (\ln x)^3 dx = \int_0^1 y^3 e^y dy$

(c) $\int_1^2 2 \ln(x^2 + 1) dx = \int_1^4 \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y}} dy$

(d) $\int_0^\pi x \cos(\pi - x) dx = \int_0^\pi (\pi - y) \cos y dy$