

**MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)**

**Kurssitentti ja yleinen tentti 21.10.2020** klo 16.30–20.30.

**Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.**

**Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. a) Olkoon  $c > 0$  vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}.$$

2. a) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}?$$

- b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2k^3 + (-1)^k \sqrt{k}}?$$

- c) Millä muuttujan  $x \in \mathbf{R}$  arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} x^k$$

suppenee?

3. Määritellään funktio  $f: [-1, \infty[ \rightarrow [-1/e, \infty[$  asettamalla  $f(x) = xe^x$ , kun  $x \geq -1$ .

a) Osoita että funktio  $f$  on aidosti kasvava.

b) Merkitään  $W(x) = f^{-1}(x)$ . Laske derivaatta  $W'(0)$ .

c) Laske toinen derivaatta  $W''(0)$  derivoimalla kaksi kertaa yhtälö

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

sijoittamalla  $x = 0$  ja ratkaisemalla kysytty lauseke.

Varoitus + lisätieto: Käänteisfunktioita  $W(x)$  ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla. Sen nimi on Lambertin  $W$ -funktio.

4. Laske integraali

$$\int_0^1 (x^3 + x) \ln(x^2 + 1) dx$$

sijoittamalla aluksi  $u = x^2 + 1$ .

5. Olkoon  $n > 1$  luonnollinen luku. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$xy' + ny = 1$$

alueessa  $x > 0$  alkuehdolla  $y(1) = 1$ . Tässä siis  $y = y(x)$ .

6. Funktiot  $y(x) = e^{3x}$  ja  $y(x) = e^{-5x}$  toteuttavat saman differentiaaliyhtälön

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0. \tag{1}$$

a) Määritä kertoimet  $\alpha$  ja  $\beta$ .

b) Muodosta differentiaaliyhtälölle (1) sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $y(0) = 0$  ja  $y'(0) = 16$ .

**Huom. 1:** Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

**Huom. 2:** Kurssitentti voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**