

Taulutehtävät

1. Ratkaise yhtälö

$$x^3 + y^3 - xy^2y' = 0.$$

Mikä on sen määrittelyalue?

2. Etsi seuraavien yhtälöiden ratkaisu annetulla alkuarvolla:

(a)  $\frac{dy}{dx} = x^4, y(2) = 3$

(b)  $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}, y(3) = 7$

$x = 2$

$$\rightarrow y = \frac{x^5}{5} + C = \frac{32}{5} + C = 3$$

SIIRRI

$$\Rightarrow C = \dots$$

$$\Rightarrow y = \dots$$

3. Etsi yhtälön

$$y''(x) - \cos x = 3$$

yleinen ratkaisu. Määrää alkuarvot tehtävän  $y(0) = 1 = y'(0)$  ratkaisu.

INTEGROI KAHDEKSI, SYNTYY KAKSI VAKIOTA.

Palautettavat tehtävät RATKAISE VAKIOT

4. Ratkaise yhtälö  $\frac{dy}{dx} = xy - 2y + x - 2$ .

5. Ratkaise yhtälö

$$y - 2xy - x^2 + x^2y' = 0.$$

Mikä on sen määrittelyalue?

6. Ratkaise yhtälö  $y' = y^2(y - 1)^2$ .

$$\rightarrow x^3 + y^3 - xy^2y' = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{SIJOITETAAN} \\ y = vx \\ \Rightarrow y' = v + v'x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x^3 + v^3x^3 - x^3v^2(v + v'x) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - x^4v^2v' = 0 \quad || : x^4 \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = v^2v' = v^2 \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v^2 dv = \frac{dx}{x}$$

SITTEEN INTEGROI PUOLITTAIN...

# PALAU TETTAVAT, VIIKKO 5, VI HJEITÄ

## MENETELMÄ 2

### RATKAISUKAAVA

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int (q(x) e^{\int p(x) dx}) dx + C \right]$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = x y - 2y + x - 2$$

$$\Rightarrow y' - \underbrace{(x-2)}_{p(x)} y = \underbrace{x-2}_{q(x)}$$

$$5. \quad y - 2xy - x^2 + x^2 y' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y' + (1 - 2x) y = x^2 \quad \parallel : x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow y' + \underbrace{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)}_{p(x)} y = \underbrace{1}_{q(x)}$$

ESIMERKKI RATKAISUKAAVAN KÄYTTÖSTÄ  
SEURAAVALLA SIVULLA.

ENSIMMÄISEN ASTEEN LINEAARINEN  
DIFFERENTIAALI YHTÄLÖ ON MUOTOA

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

MENETELMÄ 2

RATKAISUKAAVA:

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right] \quad (*)$$

ESIM.  $y' - \underbrace{2x}_{p(x)} y = \underbrace{6x}_{q(x)} \quad (1)$

$$\Rightarrow \int p(x) dx = -x^2 \quad \Rightarrow e^{-\int p(x) dx} = \underline{\underline{e^{x^2}}}$$

$$\int (q(x) e^{\int p(x) dx}) dx = \int 6x e^{-x^2} dx$$

$$= -3 \int (-2x e^{-x^2}) dx = \underline{\underline{-3 e^{-x^2}}}$$

$$y(x) \quad (*) = e^{x^2} [-3 e^{-x^2} + C]$$

$$\Rightarrow y(x) = C e^{x^2} - 3, \quad C \text{ ON VAKIO}$$

TARKISTUS SIIJOITTAMALLA NÄHDÄÄN,

ETTA  $y(x) = C e^{x^2} - 3$  TOTEUTTAA

YHTÄLÖN (1)

---

HUOM. (\*) VOIDAAN TODISTAA SIIJOITTAMALLA

YHTÄLÖÖN. (\*) VOIDAAN JOHTAA NS.

INTEGROIVAN TEKIJÄN AVULLA.

PALAUTETTAVAT, VIIKKO 5, VIHJEITÄ

MENETELMÄ 1

$$4. \frac{dy}{dx} = xy - 2y + x - 2$$

$$\Rightarrow y' - (x-2)y = x-2 \quad (EH)$$

LINEAARINEN

EPÄHOMOGEENINEN

NÄHDÄÄN, ETTÄ FUNKTIO  $y_1(x) = -1$   
ON YHTÄLÖN (EH) RATKAISU.

TARKASTELEAAN VASTAAVAA HOMOGEENI-  
YHTÄLÖÄ

$$y' - (x-2)y = 0 \quad (H)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-2)y$$

SEPAROIDAAN

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = (x-2) dx$$

TEHTÄVÄKSI  
JÄI

MÄÄRITÄ TÄMÄN YHTÄLÖN RATKAISU  
JA MERKITSE SITÄ  $y_2(x)$ .

OSOITTAUTUU, ETTÄ YHTÄLÖN (EH)  
RATKAISU ON

$$y(x) = y_2(x) + y_1(x)$$

$$5. \quad y - 2xy - x^2 + x^2 y' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y' + (1-2x)y = x^2 \quad \parallel : x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1 \quad (EH)$$

NÄHDÄÄN, ETTÄ YHTÄLÖLLÄ (EH) ON  
RATKAISU  $y_1(x) = x^2$ ,

TARKASTEELLAAN VASTAAVAA HOMOGEENI-  
YHTÄLÖÄ

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 \quad (H)$$

SEPAROIDAAN

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2} y = \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

TEHTÄVÄKSI  
JÄ'1

INTEGROI PUOLITTAIN,

SAAT RATKAISUN  $y_2(x) = \dots$

NYT YHTÄLÖN (EH) YLEINEN  
RATKAISU ~~on~~ ON

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$6. \quad y' = y^2(y-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(y-1)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2(y-1)^2} = \int 1 \cdot dx = x + C, \quad C \text{ VAKIO}$$

↑  
INTEGROITAVANA

RATIONAALIFUNKTIO,

TARVITAAN OSA MURTOKEHITELMÄ:

YRITE

$$\frac{1}{y^2(y-1)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{(y-1)^2} \parallel \cdot y^2(y-1)^2$$

$$\Rightarrow 1 = Ay(y-1)^2 + B(y-1)^2 + Cy(y-1) + Dy^2$$

RATKAISE VAKIOT  $A, B, C, D$ .

LASKE INTEGRAALI

TEHTÄVÄKSI  
JÄI

$$\int \frac{dy}{y^2(y-1)^2} = \dots = H(y) = x + C$$

SAATIIN RATKAISU MUODOSSA

$H(y) = x + C$ , MISSÄ  $H(y)$  ON JOKIN

MUUTTUN  $y$  FUNKTIO.

SAATIIN RATKAISU IMPUSIITTISSÄ  
MUODOSSA.