Harjoitus 6: Symbolinen laskenta II (Mathematica)

MS-C2107 Sovelletun matematiikan tietokonetyöt 2023

Aalto University
School of Science

Systems
Analysis Laboratory

Harjoituksen aiheita

- Differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälösysteemien analysointi Mathematicalla
- Visualisointi liukusäätimiä käyttäen

Osaamistavoitteet

- Osaat integroida symbolisesti Mathematicalla
- Osaat ratkaista differentiaaliyhtälöitä symbolisesti Mathematicaa käyttäen
- Osaat perustella Mathematican hyötyjä suhteessa Matlabiin

Derivointi ja integrointi

- Symbolista derivointia varten ovat komennot `D` (osittaisderivaatta) ja `Dt` (kokonaisderivaatta).

```
In[1]:= D[Exp[x^2], x]
Out[1]= 2 e^(x^2) x
```

- Integrointia varten ovat komennot `Integrate` (symbolinen integrointi) ja `NIntegrate` (numeerinen integrointi).

```
In[3]:=Integrate[2 Exp[x^2] x, x]
       Integrate[2 Exp[x^2] x, {x, 0, 1}]
Out[3]=e^(x^2)
Out[4]=-1 + e
In[5]:=Integrate[x*y*Max[x,y], {x,0,1}, {y,0,1}]
Out[5]=1/5
```

Huom! Kaikkia lausekkeita ei voida integroida symbolisesti.

Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälöt ratkaistaan `DSolve` -komennolla
- Muuttujat merkataan argumenttinsa kanssa, esim. `z[t]`
- Derivaatat merkitään pilkkua (`’`) käyttäen, esim. `z’[t]`
- Yhtäsuuruus merkitään vertailuoperaattorilla `==`.
  - Huom! Reunaehtoa asettaessa älä tee kirjoitusvirhettä `z[0]=0`; edes `Clear` ei välttämättä pelasta (vrt. aikaisemmin), ainoa pelastus lienee `Quit`.

`DSolve` ottaa argumentteinaan:

1. Differentiaaliyhtälö ja reunaehdot aaltosulkeiden sisällä, esim. `{z’[t]==2*z[t]}` tai `{z’[t]==2*z[t],z[2]==4}`
2. Tuntematon funktio, esim. `z[t]`, 3. Funktion argumentti, esim. `t`

Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 1/2

$$\frac{dz(t)}{dt} = 2 \cdot c \cdot t \ , \ \ z(0) = 0, \ \ z(2) = 16$$

- Ratkaistaan $z(t)$ ilman reunaehtoja

```
In[194]:= DSolve[{z'[t]==2*c*t},z[t],t]
Out[194]= {{z[t] -> c t^2 + C[1]}}
```

- DSolve-komentoon voi diff. yhtälön perään laittaa yhtä monta reunaehtoa kuin diff. yhtälön asteluku. Tällöin vastauksessa ei ole integroimisvakioita.

```
In[195]:= DSolve[{z'[t]==2*c*t,z[0]==0},z[t],t]
        = yhtalo = %[[1,1,2]]
Out[195]= {{z[t] -> c t^2}}
Out[196]= c t^2
```

Vastaus tallennettiin jatkokäsittelyä varten.

Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 2/2

- Tuntematon parametri `c` voidaan| ratkaistaan toisen reunaehdon avulla käyttäen `Solve`-komentoa:

```
In[202]:= Solve[{yhtalo == 16 /. {t -> 2}}, {c}]
        = yhtalo /. %
Out[202]= {{c -> 4 }}
Out[203]= {4 t^2}
```

- Toisen asteen differentiaaliyhtälössä voi olla kaksi reunaehtoa.

```
In[203]:= DSolve[{z''[t] == t, z[0] == 0, z[2] == 4}, z[t], t]
Out[203]= {{z[t] -> 1/6 (8 t + t^3)}}
```

Desimaaliluvut differentiaaliyhtälöissä

- Jos lausekkeissa esiintyy desimaalilukuja, Mathematica antaa vastauksen numeerisessa muodossa (esim. `2.71828...` eikä `E`).
  - Tällaisten tulosten jatkokäsittely saattaa olla Mathematicalle vaikeaa, jopa mahdotonta.
- Älä siis mielellään tee näin:

```
In[207]:= DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==0.14},x[t],t]
Out[207]= {{x[t] -> 0.140000000000000 2.71828182845905^t }}
```

- Tee näin:

```
In[208]:= DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==x0},x[t],t] /. {x0->0.14}
Out[208]= {{x[t] -> 0.14 E^t }
```

- Tai: `In[209]:= DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==14/100},x[t],t]`

```
Out[209]= {{x[t] -> (7 E^t)/50}}
```

Differentiaaliyhtälösysteemin numeerinen ratkaiseminen ja vaihetason kuvaajan piirtäminen

- Differentiaaliyhtälösysteemejä voidaan ratkaista numeerisesti komennolla `NDSolve`.
- Vaihetason kuvaajan piirtäminen onnistuu komennolla `ParametricPlot`.
- Komentojen syntaksit löytyvät komennoilla:

```
?ParametricPlot
?NDSolve
```

- Kokeile:

```
In[1]:= s = NDSolve[{x'[t] == -y[t] - x[t]^2, y'[t] == 2 x[t] - y[t]^3,
        x[0] == 1, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}]
      =ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.s, {t, 0, 20}]
```

Liukusäätimien lisääminen kuvaajiin

Mathematica on kätevä pienten interaktiivisten visualisointien tekemiseen. `Manipulate` funktiolla voit tehdä liukusäätimellä päivitettäviä kuvaajia.

Kokeile

```
In[1]:= Manipulate[Plot[{Sin[a*x], Cos[b*x]}, {x, -5, 5}],
        {a, 1, 2}, {b, 1, 2}]
```

Tehtävä A: Solow kasvumalli

Solow mallissa kansantalouden kokonaistuotantoa Y voidaan kuvata yhtälöllä

$$Y(k) = A\sqrt{k}, \tag{1}$$

jossa k kuvaa kerääntynyttä pääomaa ja A on mallin vakiotermi.

Vuosittain tuotannosta s% investoidaan pääoman kartuttamiseen ja pääomasta p% kuluu pois. Investointeja ja poistoja kuvaavat yhtälöt

$$I(s,k) = s \cdot Y(k) \tag{2}$$

$$D(k) = p \cdot k \tag{3}$$

1. Olkoon $A = 1.2$ ja $p = 0.03$. Luo kuvaaja, jossa näkyy tuotanto, investoinnit sekä poistot, kun $k \in [0, 1000]$, ja s:n arvoa voi muuttaa liukusäätimellä välillä $[0.1, 1]$. Nimeä akselit ja anna käyrille selitteet.

✍ Mitä vakiotermi A voisi kuvata?

2. Ratkaise s:n funktiona tasapainotila $k = k^*$, jossa $I(s,k) = D(k)$. Tallenna saamasi k^*:n lauseke funktioon `ksol`.

   Lisää kuvaajaasi liukusäätimen mukana siirtyvä pystyviiva merkkaamaan tasapainotilan kohtaa. (Esim. pystyviivan saa kohtaan $k = s^2$ lisäämällä plottiin `GridLines -> {{s^2}, {}}`.)

3. Käyttövarallisuus saadaan tuotannon ja poistojen erotuksena. Millä s:n arvolla kansantalouden tasapainotilan käyttövarallisuus maksimoituu? Ratkaise siis millä s:n arvolla löytyy tasapainotilan käyttövarallisuuden derivaatan nollakohta.

$$\frac{d}{ds}[Y(k^*(s)) - pk^*(s)] = 0 \tag{4}$$

🖩 Aseta s käyttövarallisuuden maksimoivalle tasolle. Lisää kuvaaja palautukseen. ✍ Tulkitse tilanne sanallisesti.

Tehtävä B: Munuaisen kaliumpitoisuus

Munuaisen kaliumpitoisuus hetkellä t on $k(t)$. Alkuhetkellä se on $k(0) = 0.0025\ \mathrm{mg/cm^3}$. Munuainen asetetaan suureen astiaan, jonka kaliumpitoisuus on $0.0040\ \mathrm{mg/cm^3}$. Tunnin kuluttua munuaisen kaliumpitoisuus on kohonnut arvoon $k(1) = 0.0027\ \mathrm{mg/cm^3}$. Tutki kaliumpitoisuuden muuttumista ajan funktiona.

✍ Mikä differentiaaliyhtälö kuvaa munuaisen kaliumpitoisuuden muuttumista? Vinkki: munuaisen kaliumpitoisuuden muutos, $\frac{d}{dt}k(t)$, on suoraan verrannollinen astian kaliumpitoisuuden ja munuaisen kaliumpitoisuuden erotukseen.

✍ Milloin munuaisen kaliumpitoisuus saavuttaa arvon $0.0035\ \mathrm{mg/cm^3}$? Vinkki: Ratkaistessasi tehtävää anna `Solve` -komennolle viimeiseksi argumentiksi `Reals`. Tämä kertoo Mathematicalle, että haluat vain reaalisia ratkaisuja.

✍ Kuinka suureksi munuaisen kaliumpitoisuus lopulta kohoaa? Laske raja-arvo käyttäen `Limit`-komentoa.

Tehtävä C: Peto-saalis-malli

Peto-saalis-mallissa kuvataan kahden lajin populaatioiden koon vaihteluja seuraavalla differentiaaliyhtälösysteemillä:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t)\\ \frac{d}{dt}y(t) &= -py(t) + qx(t)y(t)\end{aligned}$$

jossa muuttujat $x(t)$ ja $y(t)$ kuvaavat saalis- ja petokantojen kokoja kullakin ajanhetkellä t, ja a, b, p ja q ovat parametreja. Alussa saaliita on 5 ja petoja 2.

Parametrien arvot ovat $a = 2$; $b = 0.2$; $p = 3$; $q = 0.1$.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi numeerisesti käyttäen komentoa `NDSolve`. Piirrä ratkaisu vaihetasoon komennolla `ParametricPlot`. Kirjoita kaikki komennot yhden solun sisään, jotta parametrejä voi myöhemmin helposti muokata.

🖩 Liitä vastauksiisi kuva, joka kuvaa petojen saalisten määrän kehitystä vaihetasossa. Anna kuvalle otsikko.

2. Laske systeemille tasapainopiste, jossa $ax(t) - bx(t)y(t) = 0$ ja $-py(t) + qx(t)y(t) = 0$.

✍ Mikä on systeemin tasapainopiste? Anna sille tulkinta.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi käyttäen alkutilanteena tasapainopisteettä ja piirrä kuvaaja. Kokeile sitten hieman tasapainotilanteesta poikkeavia alkuarvoja.

✍ Mitä näet kuvaajassa, kun käytät lähtötilanteena tasapainopistettä? Entä, kun muutat alkuarvoja tästä hieman?

Kotitehtävä: Newsvendor-malli

- Tässä harjoituksessa ratkaisemme klassisen Newsvendor-tilausmallin optimitilausmäärän analyyttisesti.
- Vesan yritys tilaa myyntiin vekottimia. Tilausmäärä on q. Tehtaan toimitusmäärä on epävarma. Se toimittaa osuuden Z (satunnaismuuttuja) tilausmäärästä. Vesa myy vekottimet hintaan p euroa per kappale. Tehtaalle Vesa maksaa c per toimitettu kappalemäärä. Vekottimien kysyntää ei tiedetä tarkalleen vaan se on satunnaismuuttuja D.
- Yrityksen saama tuotto $\pi(q)$ on siis satunnaismuuttuja:

$$\pi(q) = \underbrace{p \overbrace{\min(D, Zq)}^{\text{myytymäärä}}}_{\text{myyntitulot}} - \underbrace{cZq}_{\text{kustannukset}} . \tag{5}$$

- Tehtävänäsi on löytää q jolla tuoton odotusarvo maksimoituu.

Kotitehtävä: Newsvendor-malli

1. Satunnaismuuttuja Z∼Tas[0,1] ja D∼Tas[0,300]. Ratkaise Mathematicalla tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke. Odotusarvon saat integroimalla

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\pi(q)] \\ = \; & \mathbb{E}[p \min(D, qZ) - cqZ] \\ = \; & \int_0^{300} \int_0^1 f_D(d) f_Z(z)(p \min(qz, d) - cqz) dz dd, \end{aligned} \tag{6}$$

missä f_D ja f_Z ovat D:n ja Z:n tiheysfunktiot.

✍ Mikä on tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke.

Vinkki: Ennen integrointia on keksittävä f_D ja f_Z. Mitä ne ovat tasajakautuneille satunnaismuuttujille?

🖩 Liitä vastauksiisi kuva tuoton odotusarvosta tilausmäärän q funktiona. $q \in [0, 500]$, $p = 120$ ja $c = 30$.

Kotitehtävä: Newsvendor-malli

2. Välttämätön ehto optimaaliselle tilausmäärälle q^* on

$$\frac{d\mathbb{E}[\pi(q^*)]}{dq} = 0 \tag{7}$$

Derivoi odotusarvon lauseke ja ratkaise nollakohta `Solve`-komennolla.

✍ Mikä on optimaalisen tilausmäärän lauseke?

✍ Sijoita lausekkeeseen $p = 120$ ja $c = 30$. Mikä on tällöin optimaalinen tilausmäärä?