# LASKUHARJOITUS VIIKOT $1-2$, MATRIISILASKENTA

## 1. MATLAB-ohjelmointiin johdatus (mukaanlukien kotitehtävä viikko 1)

**Kotitehtävä viikko 1 (deadline 24.2.)** Suorita omatoimisesti MATLAB Onramp-opetuskurssi (kesto noin 2 tuntia), osoitteella

$$\texttt{https://fi.mathworks.com/learn/tutorials/matlab-onramp.html}.$$

Sinun ei tarvitse opetuskurssia varten ladata mitään ohjelmistoa tietokoneellesi erikseen, vaan kurssin voi suorita ihan nettiselaimessasi. Kun olet suoritanut opetuskurssin, lataat sertifikaatin MyCoursesiin (Kotitehtävät > MATLAB OnRamp)

**Tehtävä 2.** Yksi matriisilaskennan pääteemoista on lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen tutkiminen matriisien avulla.

a) Lämmittelynä, ratkaise paperilla ja kynällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{cases},$$

jossa $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) Kirjoittaa tämän jälkeen Matlabiin:

```
A = [2 1; 1 -2]
b = [3 ; -1]
x = A\b
```

Tarkista, että $x$ on yhtä kuin $[x_1; x_2]$, jossa $x_1$ ja $x_2$ ovat a)-osan vastaukset.

*Matriisin* $A$ luvut $[2,1;1,-2]$ ovat yhtälöryhmän vasemman puolen kertoimet (jossa eri yhtälöt on eritetty puolipisteellä) ja *vektorin* $b$ luvut $[3;-1]$ ovat yhtälöryhmän oikean puolen vakiot.

c) Ratkaise seuraava (viiden yhtälön ja viiden muutujan) yhtälöryhmä, samalla muodolla kuin b)-osassa.

$$\begin{cases} 35x_1 & & +14x_3 & +16x_4 & +2x_5 & = 67 \\ 27x_1 & +7x_2 & +14x_3 & +4x_4 & -7x_5 & = 45 \\ -13x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +10x_4 & +8x_5 & = 9 \\ 30x_1 & -x_2 & -12x_3 & +7x_4 & +11x_5 & = 13 \\ 7x_1 & +14x_2 & +7x_3 & -3x_4 & -10x_5 & = 15 \end{cases}$$

Älä vielä huolehdi, jollet ymmärrä mitä koodisi “tarkoittaa”, vaan käytä b)-osa ihan “reseptinä”.

## Harjoitustehtävät viikko 1

**Tehtävä 1.** Esitä seuraavat lausekkeet muodossa $a + bi$:

a) $\overline{12 + 7i}$
b) $(7 + i)(3 - 2i)$
c) $\frac{7+i}{3-2i}$
d) $i^3$
e) $\sqrt{-25}$
f) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
g) $\frac{3}{4-3i}$
h) $e^{\frac{\pi i}{2}}$
i) $e^{2+\frac{2\pi}{3}i}$
j) $(1 + i)^{10}$ (Vinkki: napakoordinaatisto)

**Tehtävä 2.** Etsi seuraavat juuret ja esitä ne kompleksitasossa:

a) Yhtälön $x^4 = 1$ kaikki ratkaisut.
b) Yhtälön $x^5 = 32$ kaikki ratkaisut.
c) Yhtälön $x^3 = i$ kaikki ratkaisut.
d) Yhtälön $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ kaikki ratkaisut.

**Tehtävä 3.** Mitkä seuraavista lausekkeista ovat vektoreita? Mitkä ovat reaalilukuja? Mitkä näistä ovat järjettömiä? Perustele.

a) $\|\mathbf{a}\|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
c) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
e) $\|\mathbf{a}\|(\mathbf{b} + \mathbf{c})$
f) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

**Tehtävä 4.** Laske summat $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ja skalaaritulot (pistetulot) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Piirrä vektorit, jotka ovat tasossa, ja varmista, että vastaukset ovat järkeviä.

a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
d) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
e) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Tehtävä 5.** Etsi vektori, jonka pituus on 1 siten, että sen ja vektorin $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ välinen kulma on 60°. (Vihje: Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on etsitty vektori, ja jonka toinen kateetti on yhtäsuuntainen vektorin $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kanssa.)

## Perehdyttävä tehtävä viikko 2

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

**Tehtävä 1.** Joukko vektoreita $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ on *lineaarisesti riippuva*, jos on olemassa reaaliluvut $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, eivät kaikki 0, siten että

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

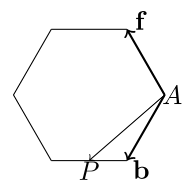
Esimerkkiksi vektorit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat, sillä

$$2\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

a) Vakuuta itsesi siitä, että kaksi geometristä vektoria ovat riippuvat jos ja vain jos ne ovat yhdensuuntaiset.
b) Näytä, että mitkä tahansa kaksi reaalilukua (t.s. vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^1$) ovat lineaarisesti riippuvat.
c) Näytä, että mitkä tahansa kolme vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ovat lineaarisesti riippuvat.
d) Osaatko sanoa mikä voisi olla b) ja c) kohdan havaintojen yleistys
e) Anna esimerkki kolmesta avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorista, jotka ovat lineaarisesti riippumattomat.
f) Anna esimerkki kolmesta avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorista, jotka ovat lineaarisesti riippuvia.
g) Luulisitko että "suurin osa" (mitä tämä sitten tarkoittaakaan) avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorikolmikkoista ovat lineaarisesti riippumattomia vai riippuvia?

## Kotitehtävät viikko 2

**Kotitehtävä 1.** Olkoon $ABCDEF$ säännöllinen kuusikulmio, ja olkoon $P$ sivun $BC$ keskipiste. Olkoon $\mathbf{b}$ vektori $\vec{AB}$ ja olkoon $\mathbf{f}$ vektori $\vec{AF}$. Esitä vektori $\vec{AP}$ vektorien $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{f}$ lineaarikombinaattiona.




**Kotitehtävä 2.** Etsi yhtälön

$$z^3 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}i$$

kaikki kolme ratkaisua. Kirjoita ratkaisu joko napakoordinaatteissa tai reaali- ja imaginaarikoordinaatteissa.

**Kotitehtävä 3.** Laske pisteen $P = (1, 2, 3)$ projektio tasoon

$$\Pi = \{(x, y, z) : x + y + z = 2\}.$$

(Ts: etsi piste $Q$ tasossa $\Pi$, siten että etäisyys $\|\vec{PQ}\|$ on pienin mahdollinen.)

**Kotitehtävä 4.** Olkoon $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto $\theta$ radiaania vastapäivään origon ympäri, ja olkoon $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto $\sigma$ radiaania vastapäivään origon ympäri. Etsi yhdistetyn kuvauksen $p \circ q$ matriisiesitys:

a) Tulkitsemalla $p \circ q$ geometrisesti kiertona.
b) Matriisikertolaskulla

Olet just todistanut uudelleen pari lukiomatematiikan tärkeimmistä trigonometrialauseista. Mitkät?

## Harjoitustehtävät viikko 2

**Harjoitustehtävä 1.** Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Laske $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Harjoitustehtävä 2.** Etsi seuraavien tasojen yhtälöt

a) Pisteiden origon, $(1, 0, 1)$, sekä $(0, 1, 0)$ läpi menevä taso.

b) Taso, joka sisältää pisteen $(2, 1, 0)$, ja jonka normaalivektori on $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Taso, joka sisältää pisteen $(2, 1, 2)$, ja jolla on suuntavektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Harjoitustehtävä 3.** Mitkät seuraavista kuvauksista $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ovat lineaarisia? Lineaarisille kuvauksilla, löydä matriisiesitykset!

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

**Harjoitustehtävä 4.** Olkoon $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ matriisin $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ antama projektio, olkoon $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto $\theta$ radiaania vastapäivään origon ympäri, ja olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kuvausmatriisin $P^T$ antama kuvaus.

(1) Laske yhdistetyn kuvauksen $f \circ r \circ p$ matriisiesitys.

(2) Lakse $f \circ r \circ p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.