



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Metsälampi

Harjoitukset, Viikko 2B, 2023



Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Muodosta seuraavien käyrien parametrisoinnit (annettuun suuntaan): a) jana pisteestä $(-1, 2, 1)$ pisteeseen $(5, 4, -2)$. b) paraabelin $y = x^2$ kaari pisteestä $(-2, 4)$ pisteeseen $(1, 1)$. c) origokeskisen 3-säteisen ympyrän kaari vastapäivään pisteestä $(3, 0)$ pisteeseen $(0, 3)$. d) edellisen kohdan käyrä vastakkaiseen suuntaan.

TEHTÄVÄ M2 Etsi parametrisoidun käyrän $x = t^3 + t$, $y = 1 - t^3$, kulmakerroin parametrin arvolla $t = 1$.

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \mathbf{i} + \frac{t}{t + 1} \mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;

pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1), 1/\sqrt{2})$.

TEHTÄVÄ J2

- a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Parametrisoitu tasokäyrä $x = \cos t$, $y = \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$ on usein läsnä luennoilla.

- a) Merkitse parametrin arvoja $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ ja $t = 3\pi/4$ vastaavat pisteet käyrälle ja päätele käyrän positiivinen kiertosuunta (tässä parametrisoinnissa).
- b) Käyrä leikkaa itseään origossa parametrin arvolla $t = \pi/2$ ja $t = 3\pi/2$. Laske vastaavien tangenttivektoreiden välinen kulma.

TEHTÄVÄ K2 Laske asteroidin $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$ koko pituus.

Ratkaisu: $6a$.

Haaste

Hiukkanen liikkuu pitkin ellipsiä

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

parametrisoituna muodossa $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

- a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys parametrin arvolla $t = \pi/4$.
- b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit parametrin arvolla $t = \pi/4$.
- (Vast: $\mathbf{a}_N = -(6\sqrt{2}/13)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$)