2.1 Sarja

Lukujonosta $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ voidaan muodostaa sen **osasummien jono** (s_n):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \end{aligned}$$

Määritelmä 2.1

Jos osasummien jonolla (s_n) on raja-arvo $s \in \mathbf{R}$, niin sanotaan, että jonosta (a_k) muodostettu **sarja suppenee** ja sen summa on s. Tällöin merkitään

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s.$$

ESIM. $0 = 0 + 0 + 0 + \ldots$

$$= \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \ldots$$

← SULKUJEN SIIRTO

$$= 1 + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) + \ldots$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$= 1$$

Missä menee pieleen?

2.1 Sarjan hajaantuminen

- Jos sarja ei suppene, niin se **hajaantuu**. Tämä voi tapahtua kolmella eri tavalla: (i) osasummat lähestyvät ääretöntä; (ii) osasummat lähestyvät miinus-ääretöntä; (iii) osasummien jono heilahtelee niin, ettei raja-arvoa ole.
- Hajaantuvan sarjan tapauksessa merkintä $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ei oikeastaan tarkoita mitään. Usein sovitaan sen tarkoittavan osasummien jonoa, joka on aina hyvin määritelty.
- Monet sarjoihin liittyvät "kummallisuudet" (esim. $0 = 1$-todistus) johtuvat siitä, että sarjan summaaminen tulkitaan operaatioksi, jossa kaikki jonon alkiot lasketaan yhteen samalla kertaa. Näin ei ole, vaan summa lasketaan osasumminen raja-arvona. Tämän vuoksi osa äärellisten summien laskusäännöistä ei enää päde sarjoille. Joissakin tapauksissa esimerkiksi sarjan summa voi muuttua, jos termien järjestystä vaihdetaan.

ESIM. $\sum_{k=1}^{m} 1 = m \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1$ vastaa tapausta (i)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

Osasummien jono on $(1, 0, 1, 0, \dots)$

$\Rightarrow$ tapaus (iii)

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \Rightarrow$ osasummien jono

$(1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$

2.2 Geometrinen sarja I

Lause 2.2

Geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k$$

suppenee, jos $|q| < 1$ *(tai* $a = 0$*), jolloin sen summa on* $\frac{a}{1-q}$. *Jos* $|q| \geq 1$, *niin sarja hajaantuu.*

Perustelu: Sarjan osasummille pätee $\sum_{k=0}^{n} aq^k = \dfrac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$, josta väite seuraa.

Yleisemmin

$$\sum_{k=i}^{\infty} aq^k = \frac{aq^i}{1-q} = \frac{\text{sarjan 1. termi}}{1-q}, \text{ kun } |q| < 1.$$

Perustelu: $s_0 = aq^0 = a$

$$s_1 = aq^0 + aq^1 = a(1+q)$$

$$\vdots$$

$$s_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$

Merkitään $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$$\Rightarrow qS = q \quad q^2 + \dots \quad q^n + q^{n+1}$$

VÄH. PUOLITT: $S - qS = 1 - q^{n+1}$

$$\Rightarrow S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ jos } q \neq 1$$

OHEISLUKEMISTA!

Esimerkki 1. Harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu, vaikka sarjan yleisen termin raja-arvo on nolla.

PERUSTELU. Sarjan kahdelle peräkkäiselle termille pätee

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

kaikilla $k \geq 2$. Ryhmitellään osasumman s_{2n} kaksi peräkkäistä termiä yhteen toisesta parista alkaen. Näin saadaan

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \cdots + \frac{2}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= s_n + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

kun $n \geq 2$. Jos sarja suppenee kohti reaalilukua a, niin yllä olevan perusteella

$$a = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \geq \lim_{n\to\infty} \left(s_n + \frac{1}{2}\right) = a + \frac{1}{2},$$

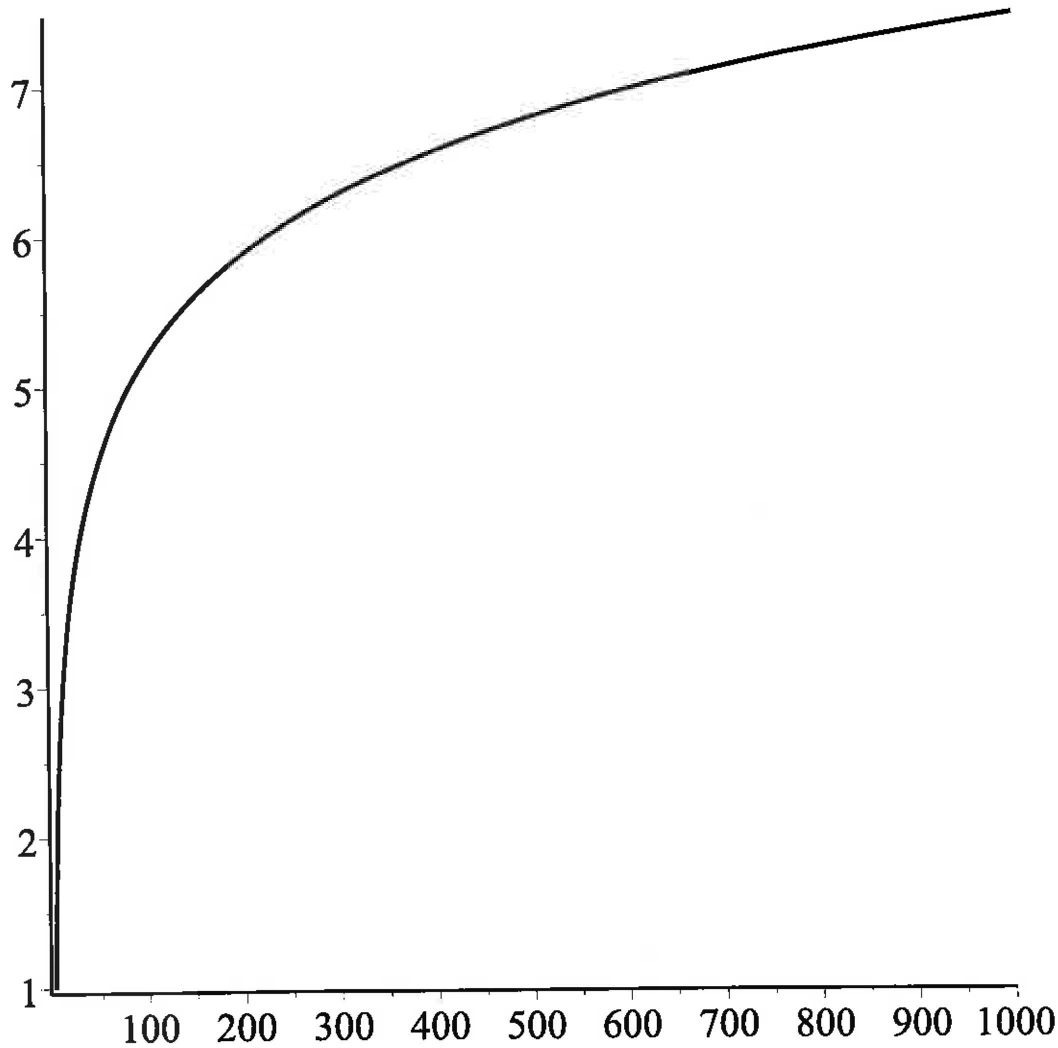
joka on ristiriita. Sarja hajaantuu siis kohti ääretöntä.

Huom: Koska $s_1 = 1$, niin yllä olevasta epäyhtälöstä seuraa suoraan myös "perinteinen" arvio

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

joka yleensä perustellaan ryhmittelemällä sarjan termit luvun 2 potenssien kokoisiin ryhmiin. Molemmat epäyhtälöt voidaan todistaa myös induktiolla, kunhan vain ensin keksitään epäyhtälön oikea muoto.

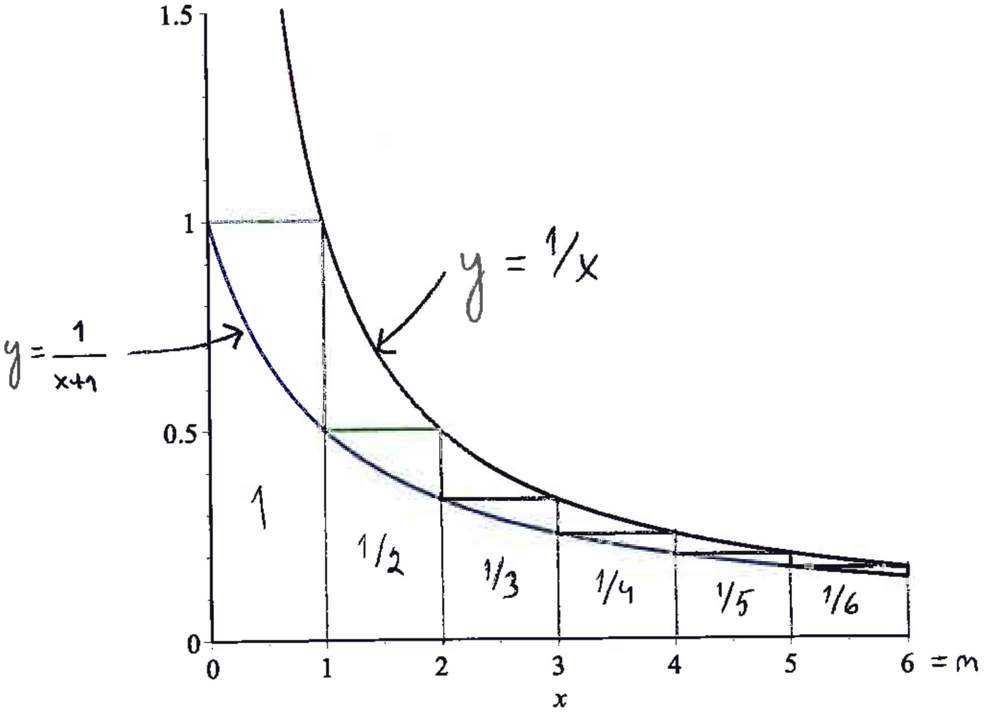
```
> seq(sum((-1)^(k+1)·k, k=1..n), n=1..10)
                          1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5                    (1)
> with(plots):
> listplot([seq(sum(1/k, k=1..n), n=1..1000)])
```




```
>
```

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: Verrataan pylväsdiagrammin pinta-aloja käyrien rajaamiin pinta-aloihin:

> $plot\left(\left[\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}, \frac{1}{\text{trunc}(x+1)}\right], x=0..6, view=[0..6, 0..1.5]\right)$



> $'int\left(\frac{1}{x+1}, x=0..n\right)' < \overbrace{'sum\left(\frac{1}{k}, k=1..n\right)'}^{\text{PYLVÄIDEN PINTA-ALA}} < 1 + 'int\left(\frac{1}{x}, x=1..n\right)'$

$$\int_0^n \frac{1}{x+1}\, dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \textbf{ and } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx \qquad \textbf{(1)}$$

> $assume(n, posint)$

> $int\left(\frac{1}{x+1}, x=0..n\right) < 'sum\left(\frac{1}{k}, k=1..n\right)' < 1 + int\left(\frac{1}{x}, x=1..n\right)$

$$\ln(n\sim+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \textbf{ and } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln(n\sim) \qquad \textbf{(2)}$$

Osasumma s_n kasvaa samaa tahtia kuin $\ln(n)$ joten sarja hajaantuu.

n~ TARKOITTAA: MUUTTUJAN n OMINAISUUKSIA ON RAJOITETTU, posint = POSITIVE INTEGER

2.2 Positiiviset sarjat II

Esimerkki 2.10

Osoita, että *yliharmonisen* sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

osasummille on voimassa $s_n < 2$ kaikilla n, joten sarja suppenee.

Ratkaisu: Perustuu kaavaan

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

kun $k \geq 2$; vrt. pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 15/kevät 2015. Toinen tapa integraalilaskennan avulla.

Leonhard Euler keksi v. 1735 sin-funktion tulokehitelmän avulla, että sarjan summa on $\pi^2/6$.

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{m} \quad \text{kaikilla } m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow s_m < 2 \quad \forall m$$

Vuoroteleva harmoninen sarja

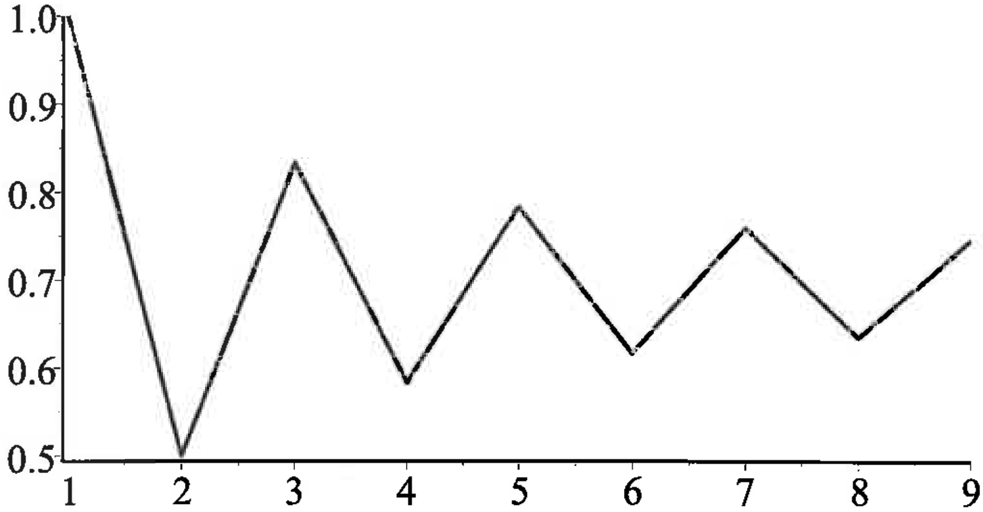
> $osasumma := n \rightarrow sum\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}, k = 1..n\right)$

$$osasumma := n \rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (1.1)$$

> $seq([n, osasumma(n)], n = 1..9)$

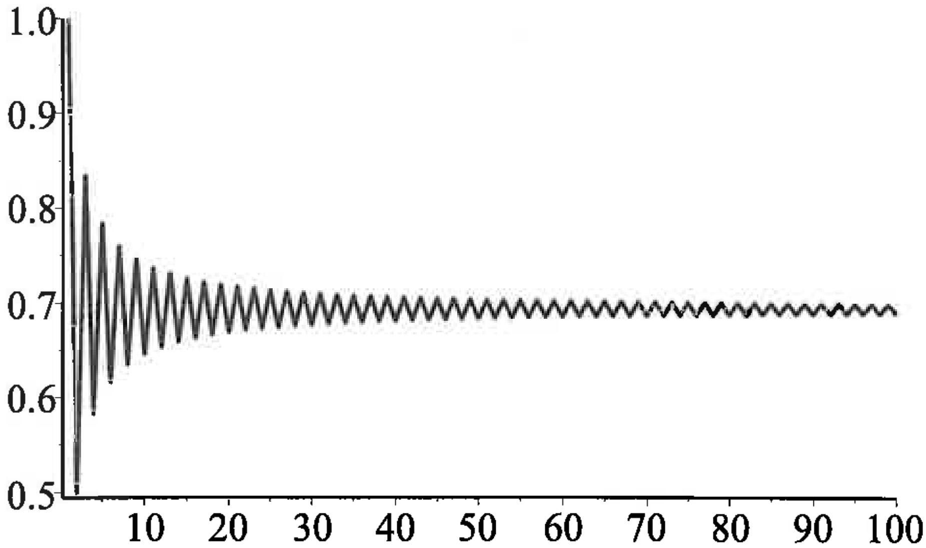
$$[1, 1], \left[2, \frac{1}{2}\right], \left[3, \frac{5}{6}\right], \left[4, \frac{7}{12}\right], \left[5, \frac{47}{60}\right], \left[6, \frac{37}{60}\right], \left[7, \frac{319}{420}\right], \left[8, \frac{533}{840}\right], \left[9, \frac{1879}{2520}\right] \quad (1.2)$$

> $plot([\%])$



> $seq([n, osasumma(n)], n = 1..100)$: # huomaa kaksoispiste -> tulosta ei näytetä

> $plot([\%])$



Järjestyksen vaihto vuorottelevassa sarjassa

Pysyykö sarjan summa samana, jos termien järjestys vaihdetaan?

> $seq\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, n=1..14\right)$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{13}, -\frac{1}{14} \quad (2.1)$$

> $sum\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, n=1..infinity\right)$

$$\ln(2) \quad (2.2)$$

> $seq\left(\left[\frac{1}{4 \cdot n-3}, \frac{1}{4 \cdot n-1}, -\frac{1}{2 \cdot n}\right], n=1..5\right)$

$$\left[1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{6}\right], \left[\frac{1}{13}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{17}, \frac{1}{19}, -\frac{1}{10}\right] \quad (2.3)$$

> $sum\left(\frac{1}{4 \cdot n-3} + \frac{1}{4 \cdot n-1} - \frac{1}{2 \cdot n}, n=1..infinity\right)$

$$\frac{3}{2}\ln(2) \quad (2.4)$$

Näin voi käydä vain sellaisten sarjojen kohdalla, jotka eivät suppene itseisesti. Tässä tapauksessa $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, jolloin $|a_n| = \frac{1}{n}$ ja päädytään hajaantuvaan sarjaan (harmoninen sarja).

2.3 Suhdetestin raja-arvomuoto II

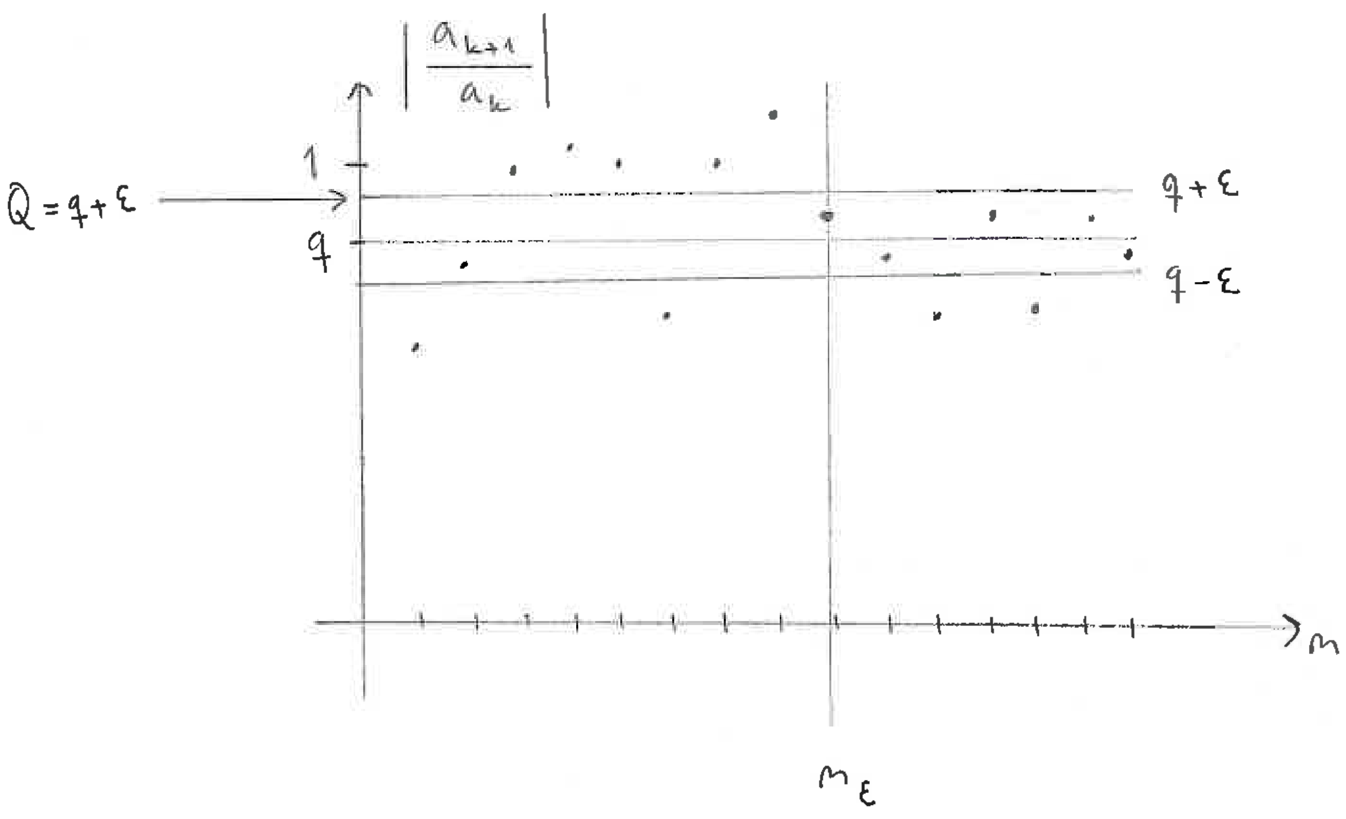
Perustelu: Jos $q < 1$, niin valitsemalla raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = (1-q)/2 > 0$ saadaan jostakin indeksistä n_ε alkaen voimaan

$$|a_{k+1}/a_k| < q + \varepsilon = (q+1)/2 = Q < 1.$$

Tällöin tulos seuraa edellisestä lauseesta.

Tapauksessa $q > 1$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.

Viimeisessä kohdassa $q = 1$ ei siis saada mitään tietoa suppenemisesta. Näin käy mm. harmonisen ($a_n = 1/n$, hajaantuva!) ja yliharmonisen ($a_n = 1/n^2$, suppeneva!) sarjan kohdalla.



2.3 Suhdetestin raja-arvomuoto III

Esimerkki 2.19

Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \dots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Tässä $a_k = (-1)^{k+1}k/2^k$, joten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+2}(k+1)/2^{k+1}}{(-1)^{k+1}k/2^k}\right| = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \to \frac{1}{2} < 1,$$

kun $k \to \infty$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee.

Huom: Tapauksissa $a_k = \frac{1}{k}$ tai $a_k = \frac{1}{k^2}$

raja-arvo on $q = 1$;

toisaalta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, mutta

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee

Tulos: Menetelmä ei toimi, jos $q = 1$

(ei saada mitään tietoa)

$\Rightarrow$ täytyy kokeilla jotakin muuta, kuten aikaisemmin tehtiin.

Suhdetesti toimii (yleensä) myös silloin, kun sarjassa esiintyy jokin parametri, esim. $x \in \mathbb{R}$.

Esim. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 4^k x^k$ suppenee?

Merkitään $a_k = k \cdot 4^k x^k$.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)\, 4^{k+1}\, |x^{k+1}|}{k \cdot 4^k\, |x^k|} = \frac{(k+1) \cdot 4 \cdot |x|}{k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot 4|x| \to 4|x|, \text{ kun } k \to \infty$$

Suhdetesti: Sarja suppenee, jos $4|x| < 1$ eli $|x| < 1/4$,

hajaantuu, jos $4|x| > 1$ eli $|x| > 1/4$

Entä $|x| = \frac{1}{4}$?

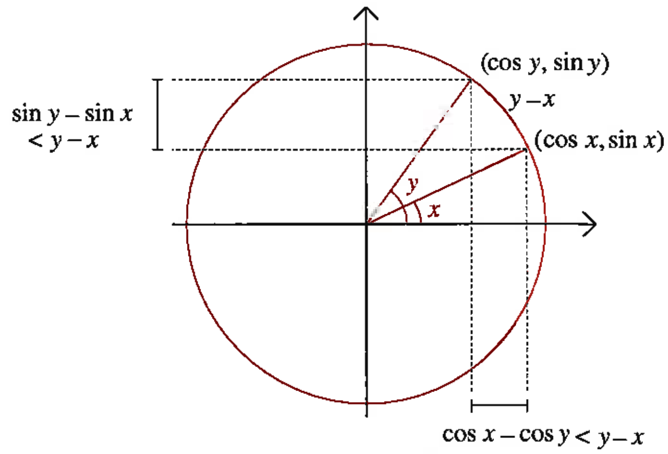
Silloin $|a_k| = k \cdot 4^k \cdot \frac{1}{4^k} = k \to \infty$, kun $k \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0$ ei päde $\Rightarrow$ hajaantuu!

Tulos Sarja suppenee $\Leftrightarrow$ $-1/4 < x < 1/4$

3.2 Jatkuvuus V

Sinin ja kosinin jatkuvuus geometrisesti yksikköympyrän avulla.



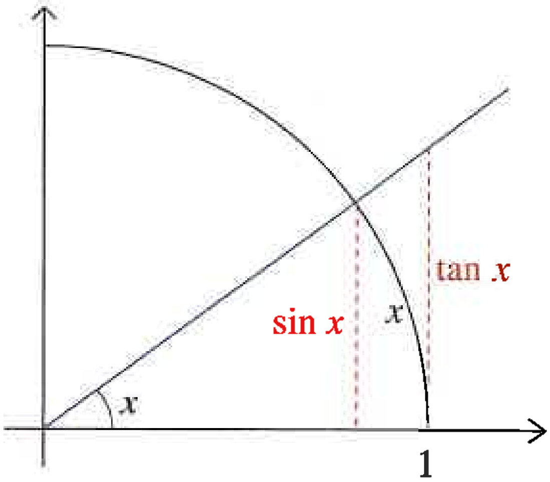
$\Rightarrow \; |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ jatkuvuus

3.4 Funktion raja-arvon suppiloperiaate III



$\sin x < x < \tan x$

TOINEN TAPA PINTA-ALOJA VERTAAMALLA:

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

PIENI KOLMIO | YMPYRÄ-SEKTORI | ISO KOLMIO

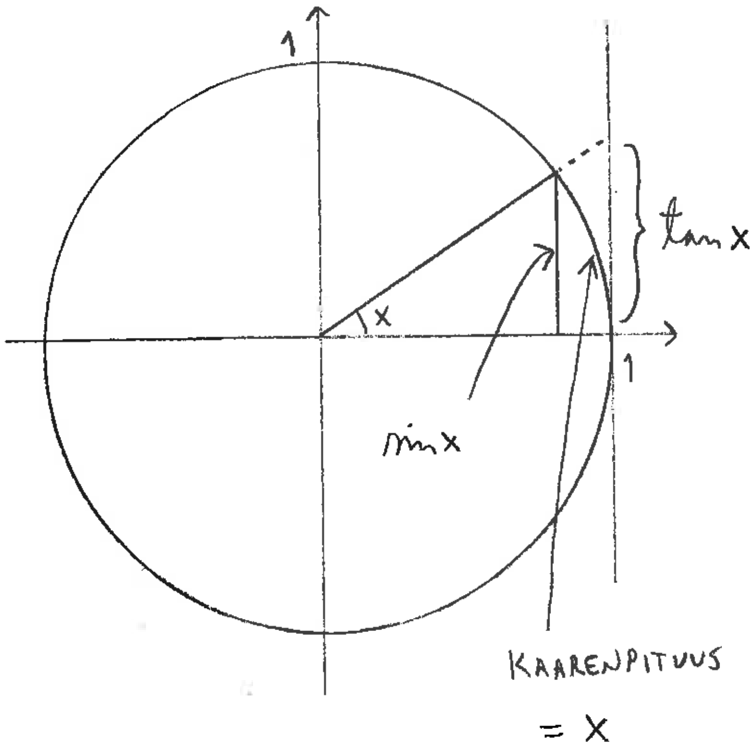
$$\Rightarrow \cos x \cdot \sin x < \underbrace{x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}_{\frac{\sin x}{x} > \cos x}$$

Esim. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Syy: Jos $0 < x < \pi/2$,

niin kuvion perusteella

$$\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



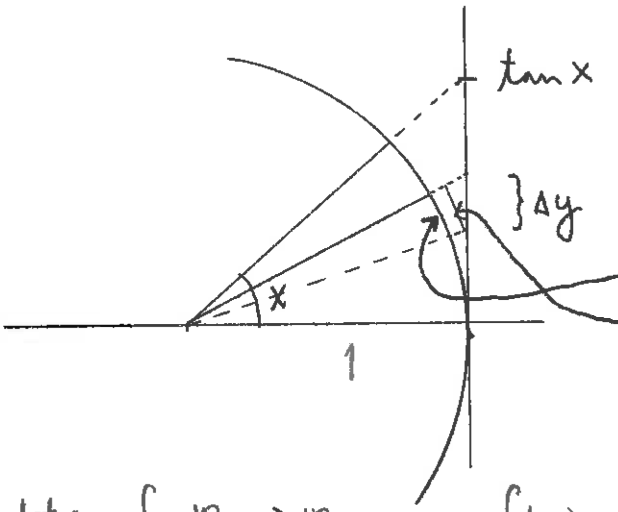
$$\Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Koska $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1$, (jatkuvuus)

niin $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (suppiloperiaate)

Samoin $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ väite.

Huom:



KAARENPITUUSALKIO

$\Delta x \le \Delta s \le \Delta y$

$\Rightarrow x \le \tan x$

Seuraus Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on jatkuva.

3.4 Raja-arvon yleistykset

Myös seuraavat käsitteet voidaan määritellä täsmällisesti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \text{jne.}$$

Esimerkiksi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

jos pätee: Jokaista $M \in \mathbf{R}$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > M \quad \text{aina, kun } x \in A \ \text{ ja } \ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ on tärkeä mm. epäoleellisen integraalin yhteydessä.

Esim.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

JNE.