Rummun värähtelyt

Suorakulmion muotoinen rumpu

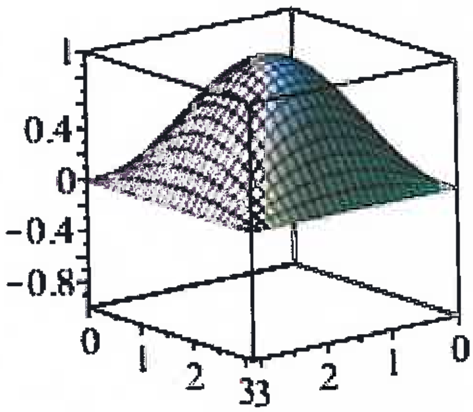
> $with(plots):$

> $u := (m, n, x, y, t) \rightarrow \cos(t) \cdot \sin(m \cdot x) \cdot \sin(n \cdot y)$

$$u := (m, n, x, y, t) \rightarrow \cos(t)\ \sin(m\,x)\ \sin(n\,y) \tag{1.1}$$

> $animate(plot3d, [u(1, 1, x, y, t), x = 0..\mathrm{Pi}, y = 0..\mathrm{Pi}], t = 0..10, frames = 50, numpoints = 1000)$

$t = 0.$



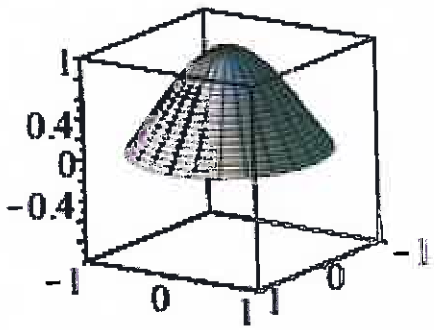
Pyöreä rumpu

> $v := (n, r, t) \rightarrow \cos(t) \cdot \mathrm{BesselJ}(0, \mathrm{BesselJZeros}(0, n) \cdot r)$

$$v := (n, r, t) \rightarrow \cos(t)\ \mathrm{BesselJ}(0, \mathrm{BesselJZeros}(0, n)\ r) \tag{2.1}$$

> $animate(plot3d, [[r, \mathrm{theta}, v(1, r, t)], r = 0..1, \mathrm{theta} = 0..2 \cdot \mathrm{Pi}, coords = cylindrical], t = 0..10, frames = 50, numpoints = 1000)$

$t = 0.$



1.2 Jonot

- Lukujonolla tarkoitetaan *ääretöntä* jonoa reaalilukuja $a_n \in \mathbf{R}$, kun indeksi $n \in \mathbf{N}$. Merkitään

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Lukujonon täsmällinen tulkinta on funktio $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, jolle $f(n) = a_n$.
- Jonon indeksöinti voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää (a_n).
- Joissakin sovelluksissa esiintyy myös jonoja, joiden indeksijoukkona on kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z}$.

Esim. Jono (a_n) alkaa $(1, 2, 3, 4, \dots)$;

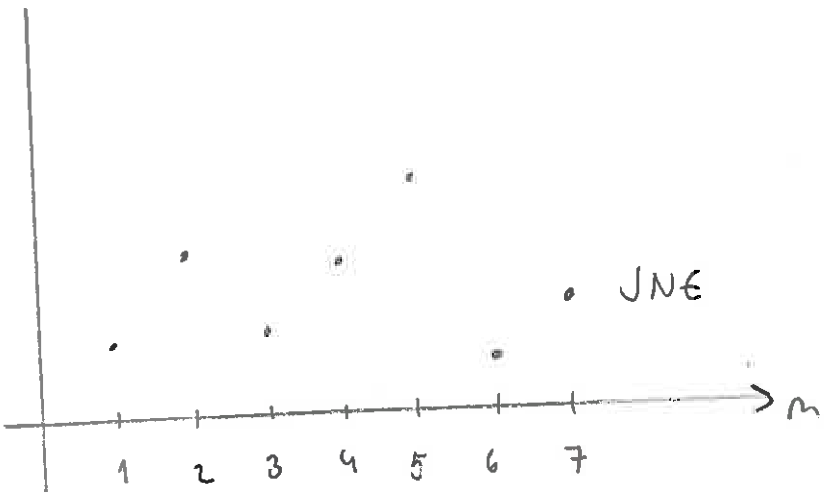
mikä on a_n:n lauseke?

Voi olla $a_n = n \ \forall n \in \mathbf{N}$, tai

$a_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 49n + 24$, tai jotain muuta...

(ks. seuraava sivu)

Huom: $a_n = f(n) \Rightarrow$ jonon kuvaaja



Sovitetaan 4:nnen asteen polynomi pisteisiin $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(4, 4)$.

> $p := x \rightarrow a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$$p := x \rightarrow a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \tag{1}$$

> $yhtälöt := \{p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 4\}$

$$yhtälöt := \{a + b + c + d + e = 1, 16\,a + 8\,b + 4\,c + 2\,d + e = 2, 81\,a + 27\,b + 9\,c + 3\,d + e = 3, 256\,a + 64\,b + 16\,c + 4\,d + e = 4\} \tag{2}$$

> $solve(yhtälöt)$

$$\left\{a = \frac{1}{24}\,e, b = -\frac{5}{12}\,e, c = \frac{35}{24}\,e, d = 1 - \frac{25}{12}\,e, e = e\right\} \tag{3}$$

> $e := 24$

$$e := 24 \tag{4}$$

> $solve(yhtälöt)$

$$\{a = 1, b = -10, c = 35, d = -49\} \tag{5}$$

> $assign(\%)$

> $p(x)$

$$x^4 - 10\,x^3 + 35\,x^2 - 49\,x + 24 \tag{6}$$

Kolmannen asteen polynomilla saadaan ratkaisu $p(x) = x$.

1.2 Käytännössä

Jonoja voidaan määritellä

- antamalla yleisen termin lauseke; esimerkiksi

$$a_n = 2^n, \text{ kun } n \in \mathbf{N} \Rightarrow \text{ lukujono } (2, 4, 8, 16, \ldots).$$

- rekursiivisesti palautuskaavojen avulla, erityisesti monissa numeerisissa menetelmissä. Esimerkiksi

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 2$$
$$\Rightarrow \text{ Fibonaccin lukujono } (0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots).$$

- tekemällä mittauksia jostakin systeemistä; esimerkiksi äänen voimakkuus tasaisin aikavälein (idealisoituna äärettömäksi jonoksi).

Esim. Korko + talletus

a_n = tilin saldo hetkellä $t = n \cdot \Delta t$

$a_1 = 1000$

$a_{n+1} = 1{,}05\, a_n + 1000$

$\Rightarrow a_n = \, ? \quad \left(20000\left(1{,}05^n - 1\right)\right)$

Esim. Fibonacci: f_n = kaniparien lkm hetkellä $n \cdot \Delta t$

$\Rightarrow f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

edelliset kanit yhä elossa

$2\Delta t$ aikaisemmin elossa olleet tuottavat yhden uuden parin

Esim. Newtonin menetelmä: Ratkaistaan $f(x) = 0$

$$\begin{cases} x_0 = \text{alkuarvaus} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \Rightarrow x_n \to \text{ f:n nollakohta ?}$$

1.2 Perusongelmat

- Mitä jonon ominaisuuksia saadaan selville yleisen termin tai palautuskaavojen avulla?
- Miten palautuskaavasta saadaan yleisen termin lauseke? Esimerkiksi Fibonaccin jonolle

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right),$$

jossa

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

on ns. kultaisen leikkauksen suhde.

Fibonaccin lukujono

\>

\> $f[0] := 0; f[1] := 1$

$$f_0 := 0$$

$$f_1 := 1 \qquad (1)$$

\> **for** n **from** 0 **to** 14 **do**
$f[n+2] := f[n] + f[n+1]$
od

$$f_2 := 1$$
$$f_3 := 2$$
$$f_4 := 3$$
$$f_5 := 5$$
$$f_6 := 8$$
$$f_7 := 13$$
$$f_8 := 21$$
$$f_9 := 34$$
$$f_{10} := 55$$
$$f_{11} := 89$$
$$f_{12} := 144$$
$$f_{13} := 233$$
$$f_{14} := 377$$
$$f_{15} := 610$$
$$f_{16} := 987 \qquad (2)$$

1.2 Jonojen ominaisuuksia

Määritelmä 1.1

Lukujono (a_n) on

- **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että $a_n \leq C$ kaikilla n
- **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $a_n \geq c$ kaikilla n
- **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu
- **nouseva**, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla n
- **laskeva**, jos $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla n
- **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva

Esim. $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_n)$ on nouseva ja rajoitettu, koska

(i) $\frac{n}{n+1} < \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow nk + n < kn + k \Leftrightarrow n < k$

(TAI: $a_{n+1} - a_n = \dots > 0 \quad \forall n$,

TAI: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots > 1 \quad \forall n$

(ii) Selvästi $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esim. Jono (a_n) ei toteuta ainuttakaan ym. ominaisuutta, kun $a_n = (-1)^n \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Suppeneminen I

Määritelmä 1.2

Lukujono (a_n) **suppenee** kohti raja-arvoa $L \in \mathbf{R}$, jos lausekkeen $|a_n - L|$ arvo lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$; täsmällisemmin: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että $|a_n - L| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$.
Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{tai} \quad \lim a_n = L \quad \text{tai lyhyesti} \quad a_n \to L.$$

Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

Huom: $|a_n - L|$ = jonon pisteen a_n ja raja-arvon L välinen etäisyys:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

$$|a_n - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\iff L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Idea: Ei haluta käyttää epämääräisiä käsitteitä "mielivaltaisen suuri" tai "mielivaltaisen lähellä".

ESIM. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

TOD. OLKOON $\varepsilon > 0$.

EHTO: $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon^2$

VALITAAN $n_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil + 1$, JOLLOIN

$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow n \geq 1/\varepsilon^2 + 1 > 1/\varepsilon^2 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$. $\square$

$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x \}$ = LUKUA x SEURAAVA TAI = LUKUE $\mathbb{Z}$

$\lceil 3{,}0 \rceil = 3$, $\lceil 3{,}1 \rceil = 4$, $\lceil -2{,}5 \rceil = -2$ JNE.

Esim. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$, koska

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, niin myös

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0 \quad \text{(suppiloperiaate)}$$

1.3 Eräitä raja-arvoja

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kun $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e =$ Neperin luku $\approx 2{,}7182818\ldots$. Tähän palataan myöhemmin.
- Stirlingin kaava (jolle ei helppoa todistusta!):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1.$$

Idea: Ensimmäinen seuraa toisesta suppiloperiaatteen avulla. Toisen kohdalla merkitään $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ja sovelletaan binomikaavaa: $n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + n(n-1)x_n^2/2 + \cdots > 1 + n(n-1)x_n^2/2$, joten $0 < x_n < \sqrt{2/n}$. Väite seuraa tästä suppiloperiaatteen avulla.

Binomikaava

$$(a+b)^m = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$
$$= a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}b^k, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$ = "kuinka monella eri tavalla m:stä tulon termistä $(a+b)$ voidaan valita k kpl b-termejä, kun tulo lasketaan auki"

↑ binomikerroin

$$m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots 2\cdot 1$$

$0! = 1$ (sopimus)

Huom: $\lim_{m\to\infty} \frac{m^2+m}{m^2} = 1$, vaikka $\lim_{m\to\infty}\left((m^2+m)-m^2\right) = \infty$

1.3 Raja-arvon yleistykset

Myös käsitteet

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ja } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

voidaan määritellä täsmällisesti.
Esimerkiksi

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad$ jokaista lukua $M \in \mathbf{R}$ vastaa sellainen indeksi $n_M \in \mathbf{N}$, että $a_n \geq M$ aina, kun $n \geq n_M$.

Sanotaan: Jono (a_n) **hajaantuu** kohti ääretöntä.

Esim. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

Syy: $\frac{n^2}{n+1} \geq M$?

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \geq M,$$

jos $n \geq 2M$

$\Rightarrow$ ehto toteutuu, jos n_M = lukua $2M$ seuraava TAI = kokonaisluku $\in \mathbb{N}$.

$= \lceil 2M \rceil$