Verrataan sinin Maclaurin-polynomien kuvaajia alkuperäiseen funktioon:

> $P := (n, x) \rightarrow sum\left(\frac{(-1)^k}{(2 \cdot k+1)!} \cdot x^{2 \cdot k+1}, k=0..n\right)$

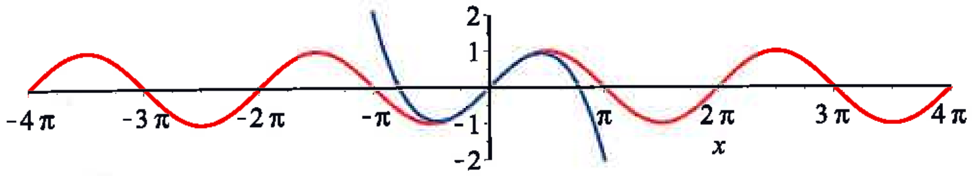
$$P := (n, x) \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{1}$$

Indeksin *n* arvo ei ole sama kuin kirjassa/luennoilla.

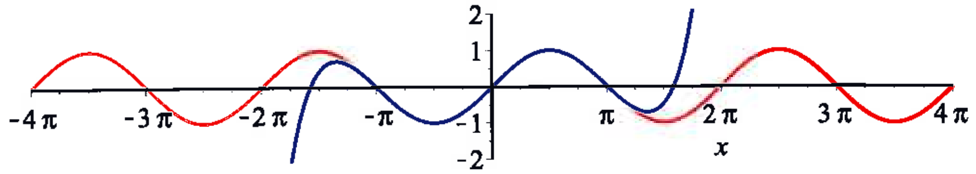
> $'P(1,x)'=P(1,x), 'P(2,x)'=P(2,x)$

$$P(1,x) = x - \frac{1}{6} x^3, P(2,x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 \tag{2}$$

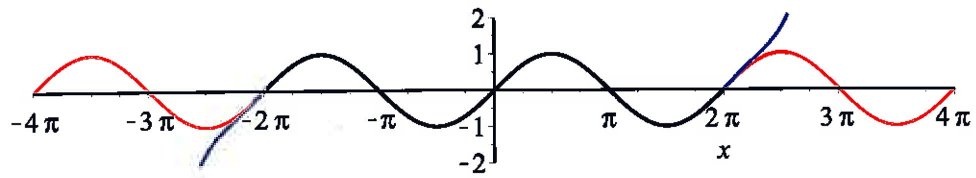
> *plot*([sin(*x*), *P*(1, *x*)], *x* =-4·Pi ..4·Pi, *view* = [-4·Pi ..4·Pi, -2 ..2], *color* = [*red*, *blue*], *scaling* = *constrained*)



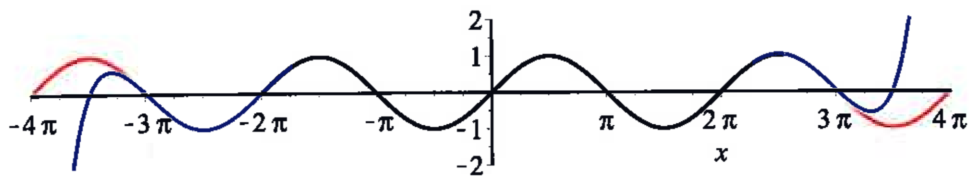
> *plot*([sin(*x*), *P*(4, *x*)], *x* =-4·Pi ..4·Pi, *view* = [-4·Pi ..4·Pi, -2 ..2], *color* = [*red*, *blue*], *scaling* = *constrained*)



> *plot*([sin(*x*), *P*(8, *x*)], *x* =-4·Pi ..4·Pi, *view* = [-4·Pi ..4·Pi, -2 ..2], *color* = [*red*, *blue*], *scaling* = *constrained*)



> *plot*([sin(*x*), *P*(12, *x*)], *x* =-4·Pi ..4·Pi, *view* = [-4·Pi ..4·Pi, -2 ..2], *color* = [*red*, *blue*], *scaling* = *constrained*)



>

5.1 Taylor-polynomi I

- Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ = funktion paras n-asteinen polynomiapproksimaatio (derivoinnin kannalta) pisteen x_0 lähellä. Maclaurin-polynomi: tapaus $x_0 = 0$.
- Jos f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0, niin polynomilla

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x; x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\
&\quad \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k
\end{aligned}
$$

on pisteessä x_0 samat derivaatat kuin f:llä kertalukuun n saakka.

MIKSI? Olkoon $x_0 = 0$, $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$

Vaatimus: $P_n(0) = f(0)$, $P_n'(0) = f'(0)$, $P_n''(0) = f''(0)$, ..., $P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

($P_n^{(n+1)}(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow$ ei voi vaatia enempää!)

Siis:

$$f(0) = P_n(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(0)$$

$$f'(0) = P_n'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = f'(0)$$

$$f''(0) = P_n''(0) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$f'''(0) = P_n'''(0) = 3 \cdot 2\, c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} f'''(0)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0) = k!\, c_k \Rightarrow c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0), \quad 0 \le k \le n$$

Huom: $0! = 1$, $f^{(0)} = f$.

YLEINEN TAPAUS $x_0 \neq 0$ SAMALLA PERIAATTEELLA.

- Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) \approx x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

$$\sin x \approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\cos x \approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Esim. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$

JNE.

$\Rightarrow f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0$ JNE

$\Rightarrow P_m(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$

$+ \ldots +$ VIIMEINEN TERMI (JONKA MUOTO RIIPPUU SIITÄ, ONKO m PARILLINEN VAI PARITON)

Siis: $P_1(x) = x = P_2(x)$

$P_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 = P_4(x)$

$P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = P_6(x)$

JNE.

Yleinen tapaus Approksimointi voidaan tehdä minkä tahansa pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ suhteen, jolloin saadaan f:n Taylor-polynomi pisteen x_0 suhteen:

$$P_m(x) = P_m(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

$$+ \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)\cdot(x-x_0)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Tällä polynomilla on samat derivaatat pisteessä x_0 kuin funktiolla f, kertalukuun m saakka.

Käytännössä Taylor-/Maclaurin polynomin voi muodostaa kahdella tavalla:

(i) Lasketaan derivaatat ja sij. määritelmään

(ii) Käytetään ennestään tunnettuja polynomeja; perustuu Taylor-polynomin 1-käsitteisyyteen: jos P_m, Q_m ovat m-asteisia polynomeja, joille $P_m(x_0) = Q_m(x_0), \dots, P_m^{(m)}(x_0) = Q_m^{(m)}(x_0)$, niin $P_m(x) = Q_m(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

Taylorin kaava:

$\underline{n=0}$ $f(x) = f(x_0) + f'(c)\cdot(x-x_0)$ JOLLAKIN $c \in [x_0, x]$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c) \quad \text{–〃–}$$

$\Leftrightarrow$ VÄLIARVOLAUSE (KALVO 74)

$\underline{n=1}$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(c)\cdot(x-x_0)^2$

<u>Todistus</u> Apufunktio $h(t) = f(t) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(t-x_0) - A(t-x_0)^2$, kun $t \in [x_0, x]$ (HUOM: x_0 ja x kiinteät)

Valitaan vakio $A \in \mathbb{R}$ niin, että $h(x) = h(x_0) = 0$

Koska $h(x_0) = h(x)$, niin on olemassa $c_1 \in]x_0, x[$, jolle $h'(c_1) = 0$

(Rollen lause h:n paikalliselle MAX/MIN)

Toisaalta $h'(t) = f'(t) - f'(x_0) - 2A(t-x_0)$, joten $h'(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ on olemassa $c_2 \in]x_0, c_1[$, jolle $h''(c_2) = 0$

(Rollen lause h':lle)

Nyt $h''(t) = f''(t) - 2A$, joten $0 = h''(c_2) = f''(c_2) - 2A$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} f''(c_2)$

Tulos: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(c_2)\cdot(x-x_0)^2$.

$\square$

Esim. $f(x) = x\sin(2x)$, $P_4(x) = ?$

P_3 $\sin(2x)$:lle: $(2x) - \frac{1}{3!}(2x)^3 = 2x - \frac{4}{3}x^3$

$\Rightarrow P_4$ $x\sin(2x)$:lle:

$$P_4(x) = x\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) = \underline{\underline{2x^2 - \frac{4}{3}x^4}}$$

Esim. Laske $f^{(4)}(0)$ edellisen tehtävän funktiolle.

Ratk. Maclaurin-polynomissa termin x^4 kerroin

on $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{4}{3}$ (ed. esimerkki)

$$\Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{4}{3} \cdot 4! = \underline{\underline{-32}}$$

Muita Maclaurin-polynomeja:

e^x: $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

$\ln(1+x)$: $P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

Esim. Integraalin $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ ei voi laskea tarkkaa arvoa.

Millainen likiarvo saadaan, jos $\sin x \to P_3(x;0)$?

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{P_3(x;0)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) = 1 - \frac{1}{6}x^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)dx = \Big/_0^1 \left(x - \frac{1}{18}x^3\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \approx \underline{\underline{0{,}944444}}$$

(TARKKA LIKIARVO: 0,946083)

$\Rightarrow$ TOIMII HYVIN!

Teoreettinen virheen yläraja?

$$f(x) = \sin x \Rightarrow E_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{\sin(c)}{4!}x^4$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x}E_3(x)\right| = \frac{|\sin(c)|}{4!}|x|^3 \leq \frac{1}{4!}, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow |\text{VIRHE}| = \left|\int_0^1 \frac{1}{x}E_3(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{1}{x}E_3(x)\right|dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4!}\,dx = \frac{1}{4!} \approx \underline{\underline{0{,}042}}$$

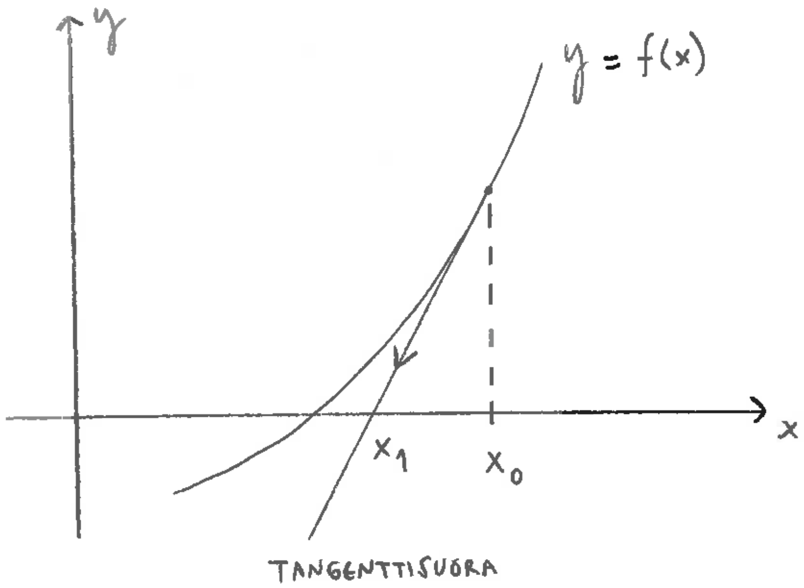
TAI $\leq \frac{1}{4!}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4\cdot 4!} \approx 0{,}0104$

$x \leq 1$ INT.VÄLILLÄ

Oikea tarkkuus selvästi parempi!

5.2 Newtonin menetelmä I

- Ensimmäisen asteen Taylor-polynomi $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on sama kuin funktion f linearisointi pisteen x_0 suhteen. Sitä voidaan käyttää erilaisissa arvioissa ja numeerisissa menetelmissä.
- Newtonin menetelmä: Yhtälö $f(x) = 0$ ratkaistaan likimääräisesti valitsemalla alkupiste x_0 (esimerkiksi kuvion perusteella) ja määrittelemällä
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ Näin saadaan lukujono $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, jonka termit yleensä antavat yhä parempia likiarvoja funktion f nollakohdalle.
- Palautuskaava perustellaan geometrisesti etsimällä funktion nollakohtaa sen linearisoinnin (eli tangentin) avulla.



$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Tangenttisuoran nollakohta x_1:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Yleinen askel samalla periaatteella.

Esimerkki Newtonin menetelmään liittyvästä iteroinnista:
lasketaan luvun $\sqrt{2}$ likiarvo etsimällä funktion
$f(x) = x^2 - 2$ positiivinen nollakohta.

> $f := x \to x^2 - 2$

$$f := x \to x^2 - 2 \tag{1}$$

> $x[0] := 2.0$ *# alkuarvaus*

$$x_0 := 2.0 \tag{2}$$

> *Digits* := 50   *# määritellään desimaalien lukumäärä*

$$Digits := 50 \tag{3}$$

> **for** n **from** 0 **to** 5 **do**   *# toistokäsky*
> $x[n+1] := x[n] - \dfrac{f(x[n])}{f'(x[n])};$
> $virhe[n+1] := evalf(x[n+1] - \mathrm{sqrt}(2))$
> **end do**

$$x_1 := 1.5000000000000000000000000000000000000000000000000$$

$$virhe_1 := 0.0857864376269049511983112757903019214303281246231$$

$$x_2 := 1.4166666666666666666666666666666666666666666666667$$

$$virhe_2 := 0.0024531042935716178649779424569685880969947912898$$

$$x_3 := 1.4142156862745098039215686274509803921568627450981$$

$$virhe_3 := 0.0000021239014147551198799032412823135871908697212$$

$$x_4 := 1.4142135623746899106262955788901349101165596221157$$

$$virhe_4 := 1.594861824606854680436831546887746738 \; 10^{-12}$$

$$x_5 := 1.4142135623730950488016896235025302436149819257762$$

$$virhe_5 := 8.99292832165045310050399 3 \; 10^{-25}$$

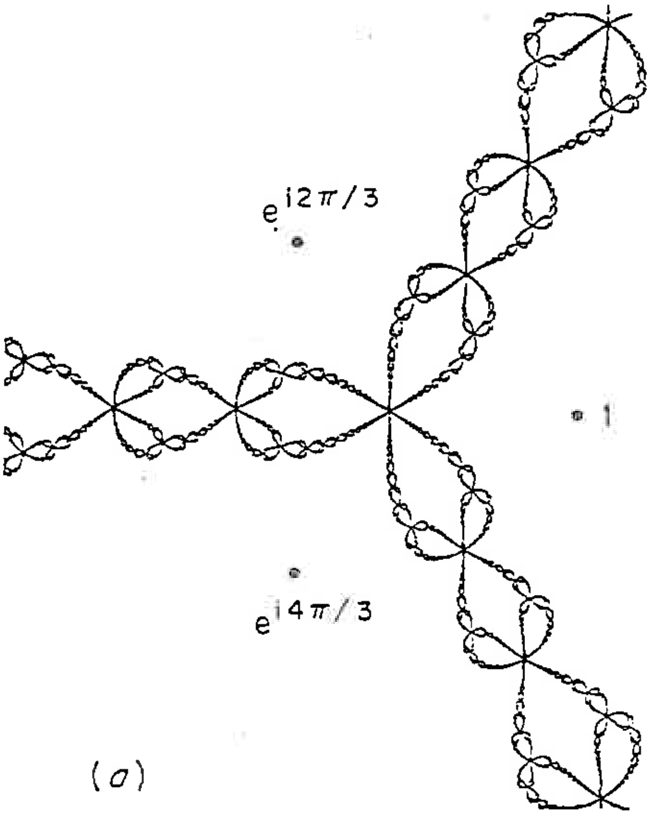
$$x_6 := 1.4142135623730950488016887242096980785696718753772$$

$$virhe_6 := 3. \; 10^{-49} \tag{4}$$

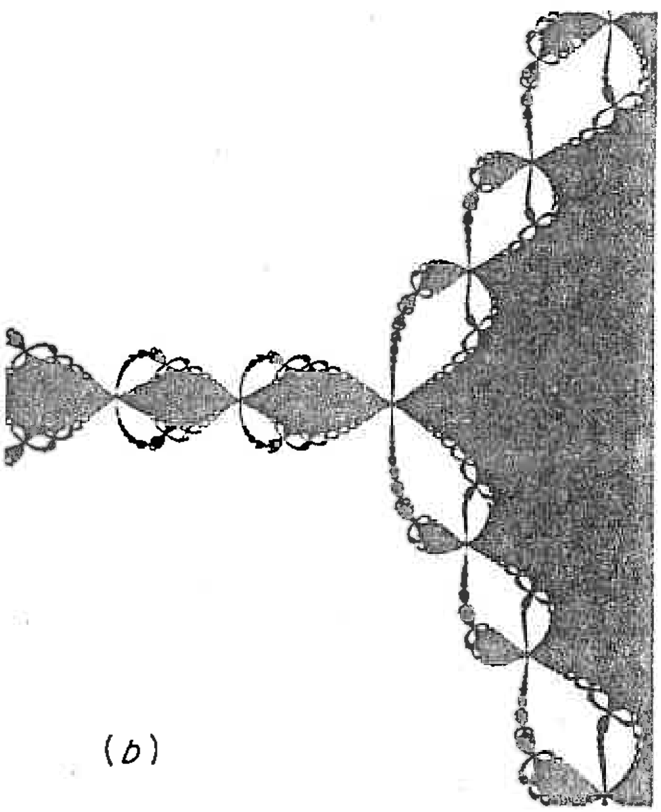
Iterointi suppenee tässä tapauksessa hyvin nopeasti: oikeiden desimaalien lukumäärä suunnilleen kaksinkertaistuu jokaisella askeleella.

FALCONER: FRACTAL GEOMETRY

$z^3 - 1 = 0$



(a)



(b)

5.3 Taylor-sarja I

- Jos Taylorin kaavan virhetermi $E_n(x)$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa, saadaan Taylor-polynomin raja-arvona funktion f Taylor-sarja (= Maclaurin-sarja, jos $x_0 = 0$).
- Taylor-sarja on siis muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Tämä on esimerkki yleisestä **potenssisarjasta**, joita esiintyy monien alkeisfunktioiden yhteydessä.

Esim. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

Taylorin kaava: $\sin x = P_n(x;0) + E_n(x;0)$, (KALVO 85)

$$E_n(x;0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |E_n(x;0)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

koska $f^{(n+1)} = \pm \sin$ tai $\pm \cos$ $\Rightarrow |f^{(n+1)}(c)| \le 1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Nyt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, (esim. suhdetestillä)

kun $x \in \mathbb{R}$ kiinteä

$$\Rightarrow \sin x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5.4 Potenssisarja IV

Esimerkki 5.5

Määritä potenssisarjan $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ summafunktio.

Ratkaisu: Tutkittava sarja on saatu derivoimalla termeittäin geometrinen sarja, jonka suhdelukuna on muuttuja x. Näin ollen

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots &= D(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Kertomalla tulos puolittain muuttujalla x saadaan mm. todennäköisyyslaskennassa geometriseen jakaumaan liittyvä summakaava

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

joka on voimassa arvoilla $|x| < 1$.

Esim. Sijoittamalla yllä $x = 1/2$ saadaan summakaava

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \underline{\underline{2}}$$

5.4 Potenssisarja VI

Esimerkki 5.6

Laske vuorottelevan harmonisen sarjan summa.

Ratkaisu: Sijoitetaan aluksi geometrisen sarjan suhdeluvuksi $q = -x$, jolloin saadaan

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Integroimalla kaavan molemmat puolet välillä $0 \leq x \leq 1$ saadaan haluttu tulos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln 2.$$

Tässä integroinnin ulottaminen suppenemisvälin päätepisteeseen $x = 1$ pitäisi perustella tarkemmin. Integraaliin ja logaritmiin palataan myöhemmin kurssilla.

$$\int_0^1 x^k \, dx = \Big/_0^1 \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$