6.2 Käänteisfunktio III

- Käänteisfunktion derivaatta: Olkoon $f\colon\ ]a,b[\ \to\ ]c,d[$ derivoituva aidosti monotoninen surjektio, jolloin f:llä on käänteisfunktio $f^{-1}\colon\ ]c,d[\ \to\ ]a,b[$. Tällöin kuvaajat $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen ja

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

jos $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.
Huom: $f'(f^{-1}(x))$ = funktion f derivaatta laskettuna pisteessä $f^{-1}(x)$.

Perustelu: $f(f^{-1}(x)) = x$ kaikilla x

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\left(f(f^{-1}(x))\right)}_{f'(f^{-1}(x))\cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x)} = \frac{d}{dx}x = 1 \quad -\text{''}-$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ = f:n kuvaaja (graafi)

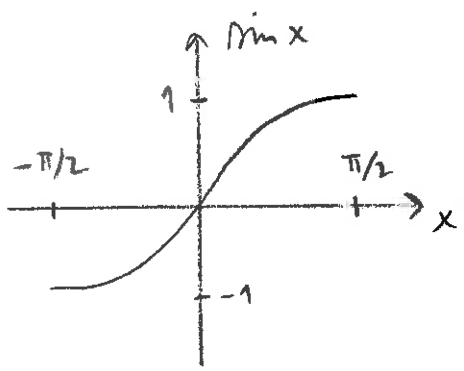
$(x,y) \in G_f \Leftrightarrow x \in A$ ja $y = f(x)$

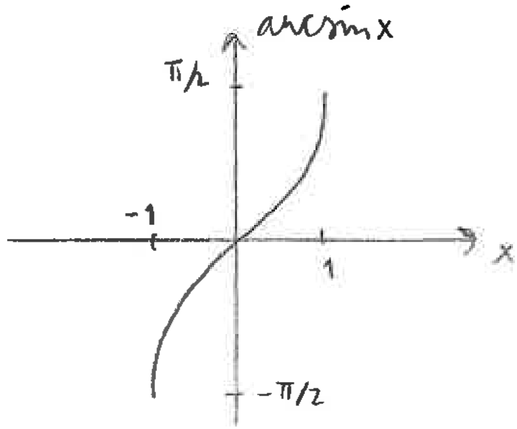
$\Leftrightarrow x \in A$ ja $x = f^{-1}(y)$

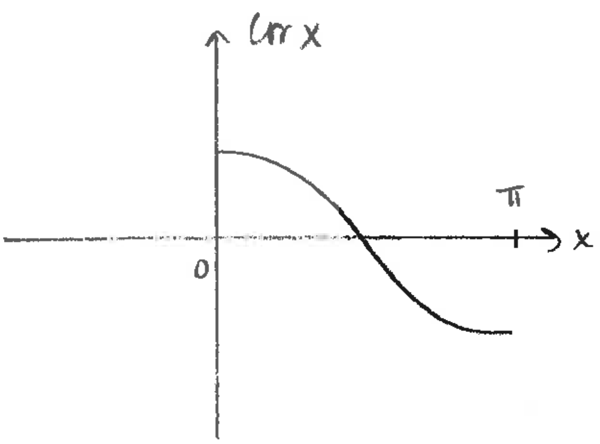
$\Leftrightarrow y \in B$ ja $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y,x) \in G_{f^{-1}}$.

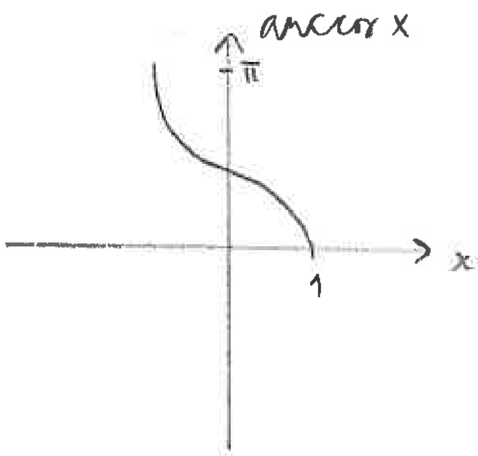
6.3 arcus-funktiot I

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.
- Sini-funktio
$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$
on aidosti kasvava bijektio.
- Kosini-funktio
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
on aidosti vähenevä bijektio.
- Tangentti-funktio
$$\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$$
on aidosti kasvava bijektio.









6.3 arcus-funktiot II

- Käänteisfunktiot:

$$\begin{aligned} \arctan &: \mathbf{R} \to \,]-\pi/2, \pi/2[, \\ \arcsin &: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2], \\ \arccos &: [-1,1] \to [0, \pi] \end{aligned}$$

- Siis:

$$\begin{aligned} x &= \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arctan x, \quad \text{kun } \alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[\\ x &= \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \quad \text{kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] \\ x &= \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos x, \quad \text{kun } \alpha \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Huom: arc$***$ annetaan **radiaaneissa**, ellei kyseessä ole geometrinen sovellus.

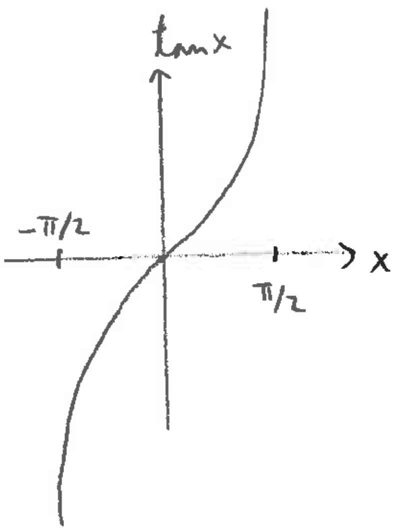
Esim. $\sin(\pi/6) = 1/2 \Rightarrow \arcsin(1/2) = \pi/6$

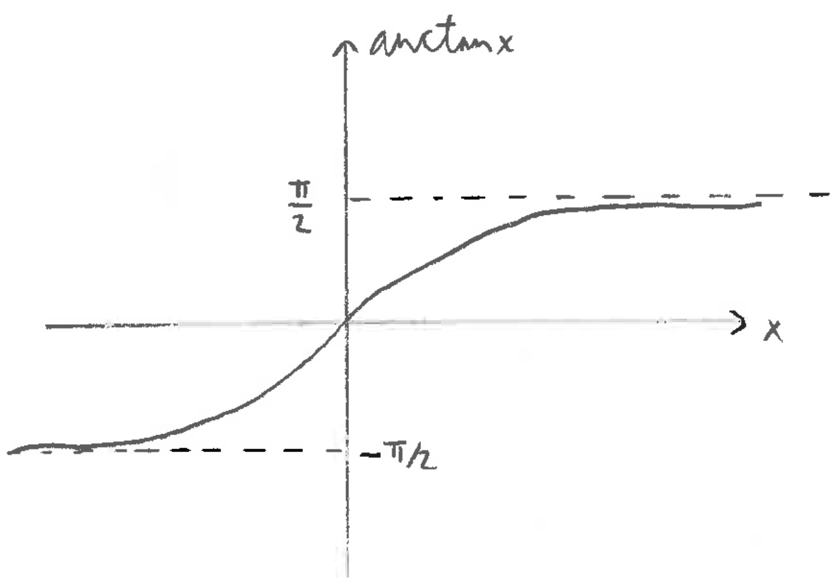
$\sin(7\pi/6) = 1/2 \not\Rightarrow \arcsin(1/2) = 7\pi/6,$

koska $7\pi/6 \notin [-\pi/2, \pi/2]$

Esim. Vektoreiden $\bar{a}, \bar{b}$ välinen kulma φ:

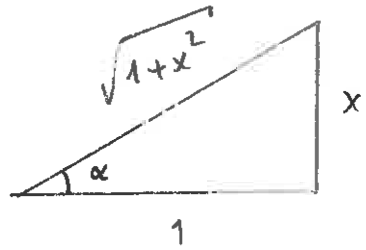
$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|}\right) \in [0, \pi]$$





Esim. $\sin(\arctan x) = ?$

APUKOLMIO:



VALITAAN APUKOLMIO NIIN, ETTÄ YKSI KULMA ON $\alpha = \arctan x$

$$\Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{x}{1} = x$$

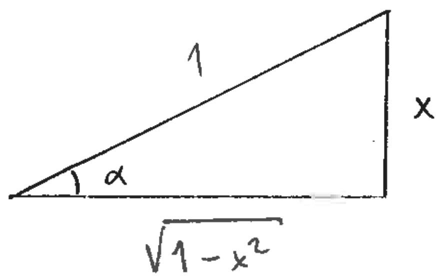
$$\Rightarrow \alpha = \arctan x$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esim. $\cos(\arcsin x) = ?$

$$\sin\alpha = x \Rightarrow \alpha = \arcsin x$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$$



APUKOLMIO

TAI:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\uparrow$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \cos t = \underset{(-)}{+} \sqrt{1-\sin^2 t}$$

6.3 arcus-funktiot III

- Käänteisfunktioiden derivaatat

$$
\begin{aligned}
D\arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \\
D\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \\
D\arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1
\end{aligned}
$$

Varsinkin ensimmäinen kaava on tärkeä integraalilaskennassa. Perustelu derivoimalla puolittain yhtälö $\tan(\arctan x) = x$, kun $x \in \mathbf{R}$:

$$
\begin{aligned}
&(1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot D(\arctan x) = Dx = 1 \\
\Rightarrow \quad & D(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Alin rivi myös suoraan käänteisfunktion derivaatan kaavasta.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ed. sivu

$$D\arctan x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Differentiaaliyhtälö $y' = ky$, k = VAKIO

tr. $y'(x) = k\,y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow y = y(x) = ?$

Kokeillaan potenssisarjaa: $(k=1)$

$y(0) = y_0$

$y'(0) = y(0) = y_0$

$y''(0) = y'(0) = y(0) = y_0$

JNE.

$\Rightarrow y^{(k)}(0) = \dots = y_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

<u>Def.</u> Eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Pätee: $\exp : \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ aidosti kasvava bijektio

$D\exp(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\exp(x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (PITKÄ LASKU!)

Neperin luku e: [OHEISLUKEMISTA + TENTÄVÄ?]

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^{m-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!\, m^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\overbrace{m\cdot(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}^{k \text{ kpl}}}{k!\cdot \underbrace{m\cdot m\cdot m\cdots m}_{k \text{ kpl}}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, 1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \qquad (*)$$

Seuraus: • $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ on kasvava

• $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} < 1+1+\sum_{k=2}^{m} \overbrace{\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}^{=\frac{1}{k(k-1)}}$$

$$= 1+1+\left(\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cancel{\ldots}\right.$$
$$\left.\cancel{\ }+\left(\cancel{\tfrac{1}{m-1}}-\frac{1}{m}\right)\right)$$

$$= 3-\frac{1}{m} < 3 \text{ kaikilla } m$$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu

$\Rightarrow$ on olemassa raja-arvo $e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$

MIKSI $\exp(x) = e^x$?

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

OHEISLUKEMISTA!

- $D\exp(x) = \exp(x)$
- $\exp(x) > 0$, kun $x > 0$
- $\exp(-x)\exp(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

SYY: $D\big(\exp(-x)\exp(x)\big) = -\exp(-x)\exp(x) + \exp(-x)\exp(x)$

$$= 0$$

$\Rightarrow \exp(-x)\exp(x) = C$. SIJ. $x = 0 \Rightarrow C = 1$

- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x)$ aidosti kasvava $\mathbb{R} \to \,]0, \infty[$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

SYY: $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}$, $x \in \mathbb{R}$, y KIINTEÄ

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) = \text{VAKIO} = f(0) = 1 \Rightarrow$ VÄITE

- $\exp(nx) = \exp(x + x + \dots + x) = \exp(x)^n$
- $\exp(p) = \exp(1)^p = e^p$, KOSKA $e = \exp(1)$; $p \in \mathbb{N}$
- $\exp(p/q) = e^{p/q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $q > 0$

SYY: $\exp(p/q)^q = \exp(p) = e^p \Rightarrow \exp(p/q) = e^{p/q}$

- $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. SYY: PÄTEE, KUN $x = p/q \in \mathbb{Q}$. JATKUVUUS

$\Rightarrow$ VÄITE. $\square$

Lause 6.1

Olkoon $k \in \mathbf{R}$ vakio. Kaikki differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = ky(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

toteuttavat funktiot $y = y(x)$ ovat muotoa $y(x) = Ce^{kx}$, jossa C on vakio. Jos funktion y arvo tunnetaan jossakin pisteessä x_0, niin vakiolle C saadaan yksikäsitteinen arvo.

Perustelu:

$$\begin{aligned}
y'(x) = ky(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = 0 \quad \Big| \text{ koska } \; e^{-kx} > 0 \text{ aina} \\
&\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{-kx} - ke^{-kx}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(y(x)e^{-kx}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-kx} = C = \text{vakio} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{kx}.
\end{aligned}$$

<u>Esim.</u> Ratkaise DY $y' = -3y$, kun $y(0) = 2$.

Tässä $k = -3$, joten $y(x) = Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$ (yleinen ratkaisu)

Sij. $x = 0$: $2 = y(0) = Ce^{-3 \cdot 0} = C$

$\Rightarrow y(x) = \underline{\underline{2e^{-3x}}}$ (<u>alkuehdon</u> $y(0) = 2$ toteuttava ratkaisu)

6.3 Logaritmi II

Logaritmin ominaisuuksia

- $e^{\ln x} = x$, kun $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\ln(a^b) = b \ln a$, kun $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, kun $a, b > 0$
- $D \ln |x| = 1/x$, kun $x \neq 0$

Nämä seuraavat vastaavista exp-funktion ominaisuuksista.
Esimerkiksi: Sijoittamalla $x = \ln a$ ja $y = \ln b$ kaavaan

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad \text{saadaan} \quad ab = e^{\ln a + \ln b},$$

joten $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ sij. $x = \ln a$, $y = \ln b$

$$\Rightarrow e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a \cdot b \quad \Big| \ln(\ldots)$$

$$\Rightarrow \ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

Muut samalla periaatteella.

$$e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$$

$$D \ln x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}, \quad \text{kun } x > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow D \ln|x| = D \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot \underbrace{D(-x)}_{=-1} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow D \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Esim. Radioaktiivisuus

$y = y(t) =$ ytimien lkm hetkellä t

$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) \approx -k\,y(t)\cdot\Delta t$ lyhyellä aikavälillä Δt

$\Rightarrow \dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx -k\,y(t)$, $k>0$ hajoamisvakio

Idealisointi ja $\Delta t \to 0 \Rightarrow y' = -ky$

Ratkaisu $y(t) = y(0)\,e^{-kt} = \underbrace{y_0}_{\text{TAVALLINEN MERKINTÄ ALKUARVOLLE}} e^{-kt}$

Puoliintumisaika T:

$y(t+T) = \frac{1}{2}\,y(t)$ kaikilla t:

$y_0\,e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2}\,y_0\,e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \quad \Big|\ \ln(\ldots)$

$\Leftrightarrow -kT = \ln(1/2) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{T = \dfrac{\ln 2}{k}}}$ tai $\underline{\underline{k = \dfrac{\ln 2}{T}}}$.

Esim. Kultaraunan isotooppin ^{194}Au, puoliintumisaika 39,5 h.

Kuinka kauan kultapitoisuus $\geq 1\,\%$? ($Au \to Pt$)

$$\begin{cases} t_0 = 0 : 100\,\% \\ t_1 = ? : 1\,\% \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t_1) = 0{,}01\, y(0) = 0{,}01\, y_0$$

Sij: $\cancel{y_0} e^{-kt_1} = 0{,}01 \cancel{y_0} \quad \Big| \ln(\ldots)$

$$\Leftrightarrow -kt_1 = \ln(0{,}01) = -\ln 100 = -2\ln 10$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2\ln 10}{k} = \frac{2\ln 10}{\ln 2 / T} = \frac{2\ln 10}{\ln 2} T \approx 6{,}64\, T$$

$$\approx 262\,h \approx \underline{\underline{11\text{ vrk}}}$$