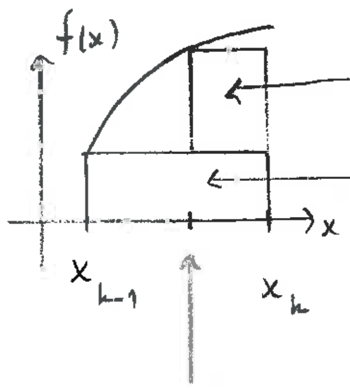
Aina pätee:
(i) Kun jakopisteitä lisätään (sanotaan: jakoa tihennetään), niin s kasvaa ja S pienenee;
(ii) $s \leq S$, vaikka ne laskettaisiin eri jakopisteillä.
Perustelu: (i) Kuviosta (tai muulla tavoin) nähdään, miten ala- ja yläsumma muuttuvat, kun lisätään yksi jakopiste.
(ii) Jos ylä- ja alasumman laskemiseen käytetään samoja jakopisteitä, niin väite on selvä, koska $m_k \leq M_k$ kaikilla k. Jos jakopisteet eivät ole samat, niin tarkastellaan tihennettyä jakoa ottamalla mukaan molempien jakojen kaikki pisteet. Tämän jälkeen väite seuraa kohdasta (i).

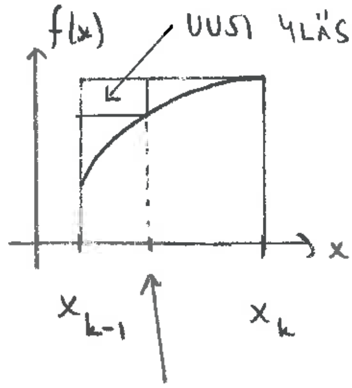


UUTTA JAKOPISTETTÄ VASTAAVA LISÄYS ALASUMMAAN (PINTA-ALAAN)

ALKUPERÄINEN ALASUMMA (PINTA-ALA)

UUSI JAKOPISTE

UUSI YLÄSUMMA ON TÄMÄN (PINTA-ALAN) VERRAN PIENEMPI



UUSI JAKOPISTE

8.1 Integraalin määritelmä

Määritelmä 8.1

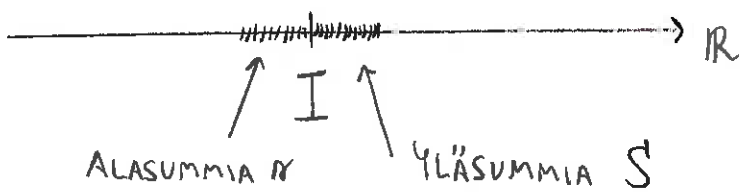
Funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jako, jossa

$$S - s < \varepsilon.$$

Funktion f integraali $I \in \mathbf{R}$ on tällöin se yksikäsitteinen luku, jolle $s \leq I \leq S$ kaikissa jaoissa, merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Positiivisen funktion tapauksessa tämä vastaa täsmälleen sitä vaatimusta, että jakoihin liittyvien pylväsdiagrammien avulla lasketut ulko- ja sisämonikulmioiden pinta-alat saadaan "mielivaltaisen" lähelle toisiaan, kun valitaan riittävän tiheä jako.



8.1 Sopimuksia

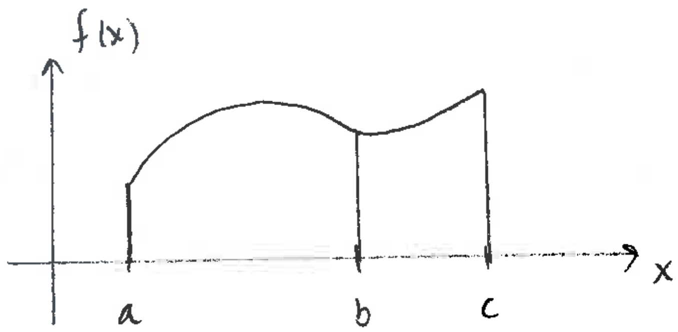
Sopimus:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tällöin pätee

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

kaikilla a, b, c järjestyksestä riippumatta (Piirrä kuvio!).



a, b, c "VÄÄRÄSSÄ" JÄRJESTYKSESSÄ

$$\int_a^c f(x)\,dx > 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx > 0 \quad \text{JA} \quad \int_b^c f(x)\,dx > 0,$$

$$\text{MUTTA} \quad \int_c^b f(x)\,dx < 0$$

$$\text{KUVIO} \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \underbrace{\int_b^c f(x)\,dx}_{= -\int_c^b f(x)\,dx} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{OK!}$$

8.1 Paloittain jatkuva funktio

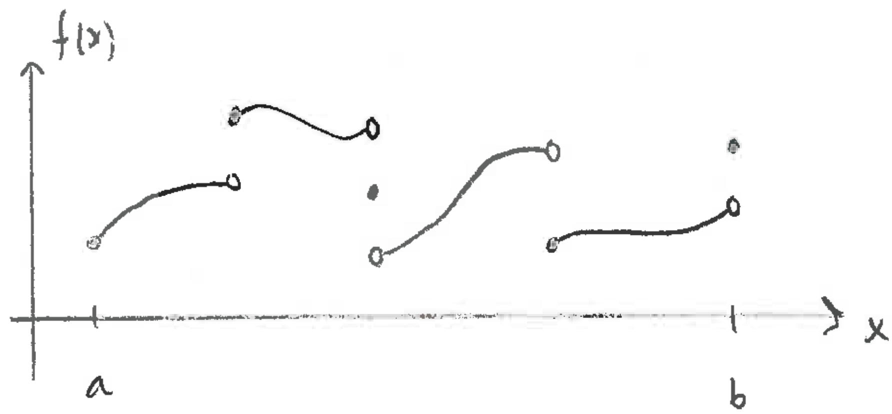
Määritelmä 8.3

Funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m \leq b,$$

joissa kaikissa toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja äärellisiä (ts. $\pm\infty$ ei sallita).

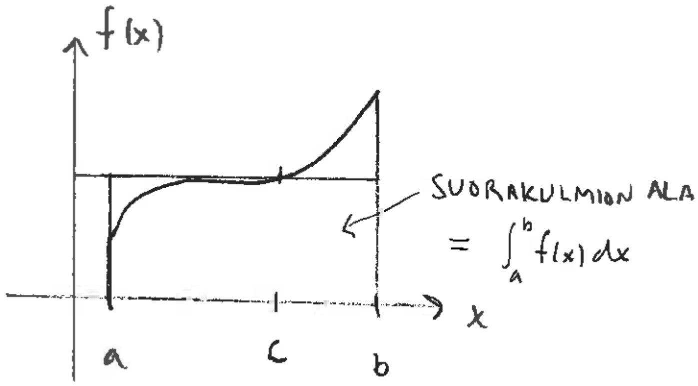
Määritelmästä seuraa, että jokaisella yksittäisellä välillä $[c_{k-1}, c_k]$ funktio f voidaan muokata jatkuvaksi muuttamalla päätepistearvoiksi ko. toispuoliset raja-arvot.



Keskiarvo-ominaisuus

Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Silloin on olemassa $c \in [a,b]$, jolle

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f\text{:n keskiarvo välillä } [a,b]$$
$$= \bar{f}$$



Syy: Merkitään

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

$$M = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

$$\Rightarrow \; m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\Rightarrow \; m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M$$

f jatkuva $\Rightarrow$ f saa kaikki arvot minimin m ja maksimin M välillä

$\Rightarrow$ on olemassa c, jolle $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

8.2 Integraalifunktio I

Määritelmä 8.7

Jos $F'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin F on funktion f **integraalifunktio**.

- Peruslauseen mukaan kaikilla jatkuvilla funktioilla f on integraalifunktio

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Sitä ei aina voida esittää alkeisfunktioiden avulla, vaikka f olisi alkeisfunktio; esim. $f(x) = e^{-x^2}$. Tällaisia integraalifunktioita (ja muita vastaavia) kutsutaan **erikoisfunktioiksi**.


```
> int(exp(-x^2), x=0..1)
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(1)\,\sqrt{\pi} \qquad (1)$$

```
> ?erf
```

erf - The Error Function

erfc - The Complementary Error Function and its Iterated Integrals

erfi - The Imaginary Error Function

Calling Sequence

```
erf(x)
erfc(x)
erfc(n, x)
erfi(x)
```

Parameters

x - algebraic expression

n - algebraic expression, understood to be an integer ≤ -1

Description

- The error function is defined for all complex x by

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)}{\sqrt{\pi}}$$

8.3 Geometrisia sovelluksia II

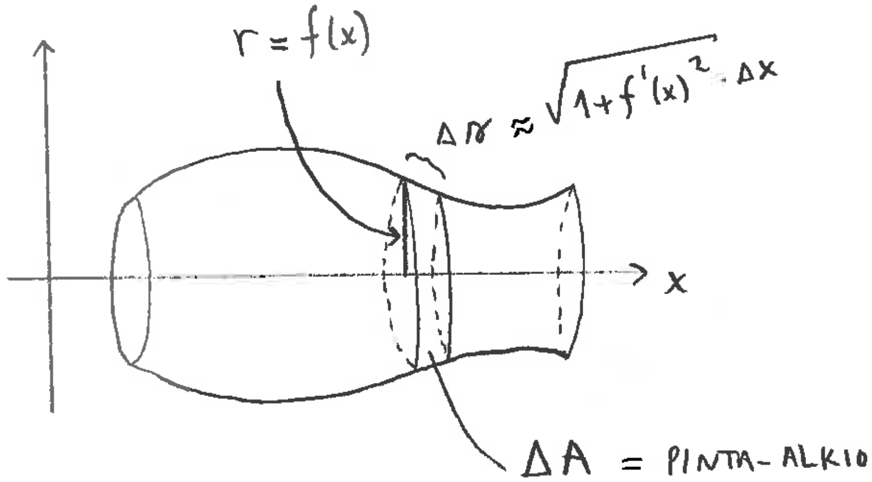
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Idea: Kun pieni pala kuvaajaa (kaarenpituus Δs) pyörähtää, niin vastaava pinta-alkio pyörähdyspinnalla on

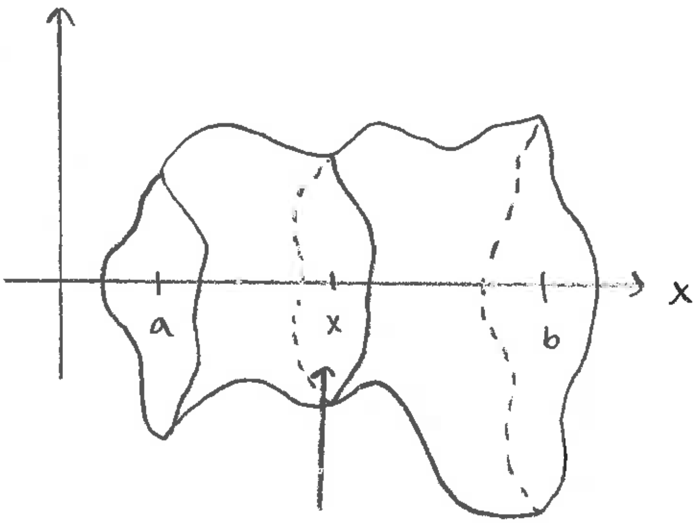
$$\Delta A \approx \text{piiri} \cdot \text{leveys} = 2\pi |f(x)| \cdot \Delta s.$$

Tarkempi arvio saadaan approksimoimalla pinta-alkiota katkaistulla kartiolla, mutta se johtaa samaan lopputulokseen.



8.3 Geometrisia sovelluksia III

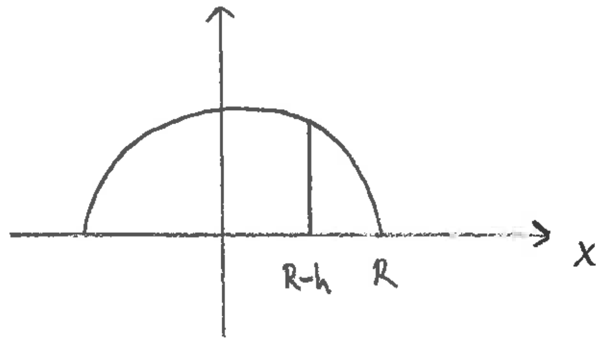
- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on
$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$
Syy: Poikkileikkaus kohdassa x on $f(x)$-säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.



$A(x)$ = POIKKILEIKKAUKSEN ALA

PINTA-ALKIO $= \Delta V \approx A(x) \cdot \Delta x$

ESIM. Pallosegmentin tilavuus, korkeus h, säde R



Pyörähdyskappale, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$$R-h \le x \le R$$

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \Big/_{R-h}^{R} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 - \left(R^2 (R-h) - \frac{1}{3} (R-h)^3 \right) \right)$$

$$= \pi \left(\cancel{\frac{2}{3} R^3} - \cancel{R^3} + \cancel{R^2 h} + \cancel{\frac{1}{3} R^3} - \cancel{R^2 h} + R h^2 - \frac{1}{3} h^3 \right)$$

$$= \underline{\underline{\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)}}$$

KOKO PALLO: $h = 2R$

$$\Rightarrow V = \pi (2R)^2 \left(R - \frac{2R}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} R^3}}$$

OHEISLUKEMISTA

Epäoleellisten integraalien sovelluksia:

Integraalimuunnokset, esim.

Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Fourier-muunnos

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

Mellin-muunnos (Hjalmar Mellin 1854-1933 TKK:n mat. prof. 1908-1926)

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx$$

Jatkuvan jakauman kertymäfunktio, esim.

$N(\mu, \sigma^2)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\, dt$$

8.4 Epäoleellinen integraali

Kaksi eri perustyyppiä:

- Tyyppi I: Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $]-\infty, b]$ tai koko $\mathbf{R}$
- Tyyppi II: Funktio $f\colon\,]a, b[\to \mathbf{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä
- Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta: vaaditaan, että jokainen erikseen antaa äärellisen tuloksen, jolloin koko integraali = osien summa

Esimerkki 8.12

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jos molemmat oikean puolen integraalit suppenevat (kuten myöhemmissä esimerkeissä osoitetaan).

Maple: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \underline{\underline{\pi}}$

8.4 Tyyppi I II

Esimerkki 8.14

Laske epäoleellinen integraali $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

Ratkaisu: Koska

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -\Big/_0^R e^{-x} = 1 - e^{-R} \to 1,$$

kun $R \to \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

<u>Esim.</u> Millä parametrin $p>0$ arvoilla $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ suppenee?

Ratk. $\int_1^R x^{-p}\,dx \underset{p\neq 1}{=} \Big/_1^R \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p}-1\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} \begin{cases} \infty, & 0<p<1 \\ \frac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$

$p=1$: $\int_1^R \frac{dx}{x} = \Big/_1^R \ln x = \ln R \to \infty$, kun $R \to \infty$

<u>Tulos</u>: Suppenee $\Leftrightarrow p>1$, jolloin $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$

8.4 Integraali koko reaaliakselin yli I

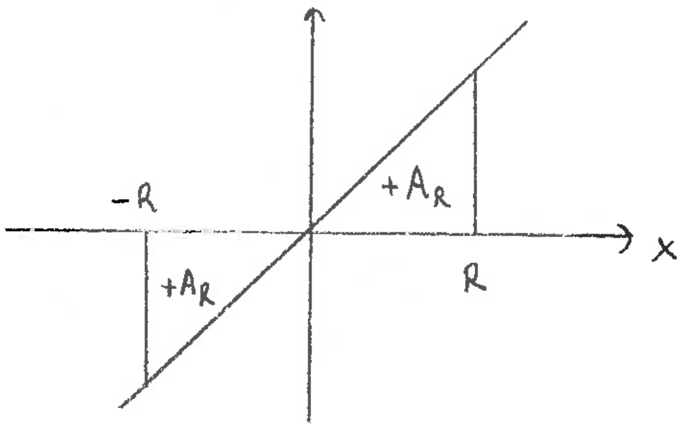
Esimerkki 8.15

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Integraalin määritelmä koko reaaliakselin yli yllä olevaa raja-arvoa käyttämällä on periaatteessa mahdollinen, mutta johtaa hieman kummallisiin tuloksiin. Sille (ja muille samantapaisille variaatioille) käytetään nimitystä Cauchyn pääarvointegraali, mutta se ei ole integraalin "virallinen" määritelmä.



$$\int_{-R}^{R} x\, dx = \frac{1}{2} \Big/_{-R}^{R} x^2 = 0 \quad \text{kaikilla } R$$

8.4 Integraali koko reaaliakselin yli II

Määritelmä 8.16

Jos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

Esim. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$

$$= \Big/_{-\infty}^{0} e^{x} - \Big/_{0}^{\infty} e^{-x} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

↑ TARKOITTAA $\lim\limits_{R\to\infty}$ - TULKINTAA!