8.5 Osittaisintegrointi I

Lause 8.21

Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia funktioita välillä $[a, b]$ (eli käytännössä hieman suuremmalla avoimella välillä). Tällöin

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Vastaavasti integraalifunktioille pätee

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Perustelu: Tulon derivoimissääntö, integrointi ja termien ryhmittely.
Idea: Toimii silloin, kun funktion $f(x)g'(x)$ integrointi on helpompaa kuin alkuperäisen funktion $f'(x)g(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)dx}_{\overset{b}{\underset{a}{/}} f(x)g(x)} = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Esim. $\int_0^\infty x e^{-x}\, dx = ?$

$$\int_0^R x e^{-x}\, dx = \Big/_0^R x\cdot(-e^{-x}) - \int_0^R 1\cdot(-e^{-x})\, dx$$

VALITAAN $f'(x) = e^{-x}$
$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}$
$g(x) = x$
$\Rightarrow g'(x) = 1$

$$= -Re^{-R} + 0 + \int_0^R e^{-x}\, dx$$

$$= -Re^{-R} - \Big/_0^R e^{-x} = -Re^{-R} - e^{-R} + e^0$$

$$= 1 - Re^{-R} - e^{-R} \to 1, \text{ kun } R \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x e^{-x}\, dx = \underline{\underline{1}}$$

[Valinta $f'(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$ johtaa hankalampaan integraaliin $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$]

Esim. $\underline{\int e^x \sin x\, dx}$

$f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

$f'(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\, dx\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underline{\int e^x \sin x\, dx}$$ ← SAMA KUIN ALUSSA, MUTTA −MERKKI

$$\Rightarrow 2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) + C'$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C}}$$

Esim. $\int \ln x \, dx = ?$

$f'(x) = 1$

$g(x) = \ln x$

$g'(x) = 1/x$

$f(x) = x$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \underline{\underline{x \ln x - x + C}}$$

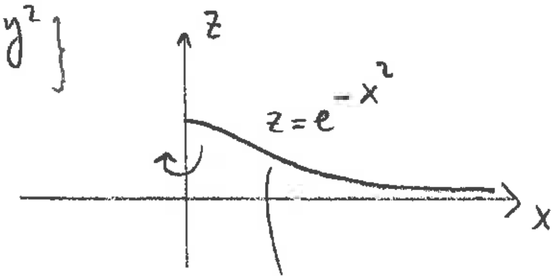
Tosin: Samalla vaivalla, kun keksitään valita $f'(x) = 1$, voidaan myös kokeilla:

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = \ln x + \frac{d}{dx} x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x \ln x - x) = \ln x.$$

KUVA!

Esim. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus kahdella eri tavalla: KAPPALE $= \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$



$x = \sqrt{-\ln z}$

$0 < z \leq 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{-\ln z}\right)^2 dz = -\pi \int_0^1 \ln z \, dz$$

$$= -\pi \Big/_0^1 (z \ln z - z) = \underline{\underline{\pi}},$$ koska $z \ln z \to 0$, kun $z \to 0+$

Viipaloimalla: $y =$ VAKIO, poikkileikkauksen ala

$$A(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx = e^{-y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{= I} = e^{-y^2} \cdot I$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\infty}^{\infty} A(y) \, dy = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \underline{\underline{I^2}}$$

Verrataan tuloksia

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

8.5 Sijoitusmenetelmä I

Lause 8.23

Jos f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du,$$

kun $A = g(a)$, $B = g(b)$.

Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a) = A$, $x = b \Rightarrow u = g(b) = B$.
Perustelu: Seuraa yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä integroimalla.
Huomaa, että sijoituksen jälkeen **ei tarvitse** enää palata alkuperäiseen muuttujaan x (paitsi integraalifunktiota laskettaessa; kts. alla).

Tod. Olkoon $F'(u) = f(u)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \Big/_a^b F(g(x)) = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(B) - F(A)$$

$$= \Big/_A^B F(u) = \int_A^B f(u)\,du$$

8.5 Sijoitusmenetelmä II

Muunnos $u = g(x)$ voidaan (usein) kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$
\begin{aligned}
x &= g^{-1}(u) \Rightarrow \\
dx &= (g^{-1})'(u)\, du = \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\, du = \frac{1}{g'(x)}\, du,
\end{aligned}
$$

joten tulos on sama kuin aikaisemmin. On suositeltavaa kirjoittaa muunnos aina molempiin suuntiin, koska rajojen laskeminen on helpompaa alkuperäistä muotoa käyttämällä, mutta differentiaalin muuttuminen on (yleensä) helpompi laskea käänteisen muodon avulla. (Adams & Essex -kirjassa nämä käsitellään erikseen kohdissa 5.6 ja 6.3, mikä on tavallaan turhaa.)

Esim. (Helppo myös muuten)

$$\int_0^2 \sqrt{3x+1}\, dx$$

$$\left\{\begin{aligned}
& u = 3x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(u-1) \\
& \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\, du \\
& x = 0 \Rightarrow u = 3\cdot 0 + 1 = 1 \\
& x = 2 \Rightarrow u = 3\cdot 2 + 1 = 7
\end{aligned}\right.$$

$$= \int_1^7 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} \Big/_1^7 u^{3/2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\left(7\sqrt{7}-1\right)}}$$

Esim. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

sij. $x+1 = 2u$

$\Leftrightarrow u = \dfrac{x+1}{2}$

$dx = 2\,du$

$x=0 \Rightarrow u = 1/2$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

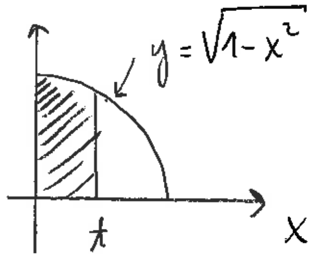
$$= \int_{1/2}^{1} \frac{2\,du}{4u^2+4} = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \Big/_{1/2}^{1} \arctan u = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan 1/2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan 1/2}}$$

(LOPUT SIJOITUSMENETELMÄN ESIMERKIT OHEISLUKEMISTA ! ?)

Lisää esimerkkejä:



Esim. Aikaisemmin esiintynyt integraali

$$\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad , \quad 0 \le t \le 1$$

sij. $x = \sin u$

$dx = \cos u$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = t \Rightarrow u = \arcsin t$

$$= \int_0^{\arcsin t} \sqrt{1-\sin^2 u}\;\underbrace{\cos u\,du}_{dx}$$

ol. $\arcsin t \le \pi/2$

$$= \int_0^{\arcsin t} |\cos u| \cos u\,du = \int_0^{\arcsin t} \cos^2 u\,du$$

$\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$

$\Rightarrow \cos^2 u = \frac{1}{2}(\cos(2u)+1)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin t} (\cos(2u)+1)\,du = \frac{1}{2} \Big/_0^{\arcsin t} \left(\frac{1}{2}\sin(2u) + u\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(2\arcsin t) + \frac{1}{2}\arcsin t$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sin(\arcsin t)}_{t}\;\underbrace{\cos(\arcsin t)}_{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2}\arcsin t$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t}}$$

(TAI SUORAAN GEOMETRISESTI:

HUOM: $t = 1 \Rightarrow \arcsin 1 = \pi/2 \Rightarrow$ TULOS $= \pi/4$ = ympyrän neljänneksen ala

Esimerkki 8.24

Laske integraali $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$.

Ratkaisu: Neliöjuuri hankaloittaa integroimista, joten sijoitetaan $x = t^2$, kun $t \geq 0$. Tällöin $dx = 2t\,dt$ ja käänteisestä muodosta $t = \sqrt{x}$ saadaan (hieman helpommin): kun $x = 0$, niin $t = \sqrt{0} = 0$; kun $x = \pi^2$, niin $t = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = 2\pi.$$

(Viimeinen integraali laskettiin aikaisemmin osittaisintegroimalla)

Esim. Kaikki trigonometriset funktiot voidaan poistaa integraalista sijoituksella $x = \tan(t/2) \Leftrightarrow t = 2\arctan x$

Syy: $\cos t = 2\cos^2(t/2) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\cos(t/2) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

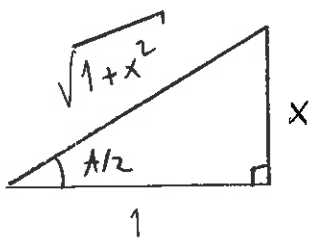
$$\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2) = 2\,\frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)}\cdot\cos^2(t/2)$$

$$= 2\tan(t/2)\cdot\cos^2(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$dt = \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

Esim. $\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,dx = \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$$= \underline{\underline{\ln|\tan(t/2)| + C}}$$



$\tan(t/2) = \frac{x}{1} = x$