9.2 Separoituva DY III

Jos mukana on alkuehto $y(x_0) = y_0$, niin voidaan oikaista ilman yleistä ratkaisua:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&\Leftrightarrow \quad H(y) - H(y_0) = F(x) - F(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = H^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + H(y_0)\big).
\end{aligned}
$$

Toinen tapa: Kiinnitetään yleisen ratkaisun vakio C alkuehdon avulla.

OIKEA TODISTUS (ILMAN dx-dy-temppuja!)

$y'(x) = f(x)\,g(y(x))$ OLETETAAN $g(y(x)) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

VASEMMALLA sij. $s = y(t)$

$\Rightarrow ds = y'(t)\,dt$

$$\begin{cases} t = x_0 \Rightarrow s = y(x_0) = y_0 \\ t = x \Rightarrow s = y(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = H^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + H(y_0)\big)$$

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut I

- Separoimalla lasketusta yleisestä ratkaisusta jää yleensä pois sellaisia ratkaisuja, jotka liittyvät funktion $g(y)$ nollakohtiin. Syy: Lausekkeella $g(y(x))$ jakaminen edellyttää, ettei se ole nolla.
- Jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa DY:n $y' = f(x)g(y)$ vakioratkaisu $y(x) \equiv \alpha$, koska tällöin $y'(x) \equiv 0 = g(\alpha) \equiv g(y(x))$.
- Näitä ratkaisuja kutsutaan yhtälön triviaali- tai erikoisratkaisuiksi.
- Mikäli seuraavan lauseen ehdot ovat voimassa, niin separoituvan DY:n kaikki ratkaisut saadaan joko yleisestä ratkaisusta tai erikoisratkaisuista.

<u>Esim.</u> Putoamisliike + ilmanvastus

$y(t)$ = kappaleen paikka hetkellä t, pos. suunta alas

$F = ma = m v'(t)$

$F = -kv^2$ ILMANVASTUS (suunta ylös!)

$+ mg$ PAINOVOIMA (alas)

$\Rightarrow -kv^2 + mg = mv'$ (SEPAROITUVA, $f(t) = \text{VAKIO} = 1$)

<u>RAJANOPEUS</u>: $v' = 0 \Leftrightarrow mg - kv^2 = 0 \Leftrightarrow v = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{mg}{k}}$

Vastaa DY:n erikoisratkaisua!

Lause 9.7

Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.
(i) Jos f *on jatkuva (kahden muuttujan funktio), niin ainakin yksi alkuehdon toteuttava ratkaisu on olemassa jollakin pisteen* x_0 *sisältävällä välillä.*
(ii) Jos lisäksi f *on jatkuvasti derivoituva muuttujan* y *suhteen, niin alkuehdon toteuttava ratkaisu on yksikäsitteinen.*
(iii) Yksikäsitteisyys on voimassa myös silloin, kun kohdan (i) lisäksi f *on jatkuvasti derivoituva muuttujan* x *suhteen ja* $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Lauseen todistus perustuu ns. Picard-Lindelöf-iterointiin, jonka muotoiluun osallistui suomalainen matemaatikko Ernst Lindelöf (1870-1946).

Esim. $y' = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 0$

Ei toteuta ehtoa (ii) eikä (iii).

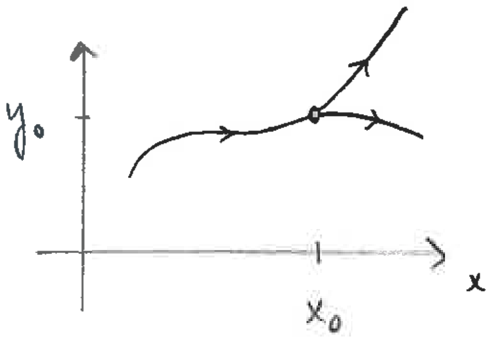
Kaksi eri ratkaisua:

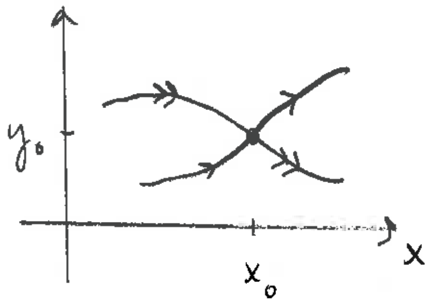
$y_1(x) = x^3$ (separoimalla)

$y_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (triviaaliratkaisu)

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut IV

- Yhtälön määrittelyalueen jokaisen pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee yksikäsitteinen ratkaisukäyrä.
- Erityisesti: ratkaisukäyrät eivät voi leikata toisiaan eikä yksittäinen ratkaisukäyrä voi haarautua kahteen tai useampaan osaan.
- Separoituvan DY:n muut ratkaisukäyrät eivät siis voi leikata triviaaliratkaisukäyriä $y = \alpha$, joten kaikille muille ratkaisuille ehto $g(y(x)) \neq 0$ on automaattisesti voimassa!





Alkuehdolla $y(x_0) = y_0$ ei 1-käsitteistä ratkaisua

$\Rightarrow$ mahdoton tilanne!

(jos ehdot voimassa)

VIHJE: VASTAAVA STACK-TEHTÄVÄ:

OLE TARKKANA MERKKIEN KANSSA, KUN POISTAT |.|-MERKIT!

2. $y' = \frac{6}{x} \cdot (2+y)$, $y(1) = 8$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x} \cdot (2+y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y+2} = 6 \frac{dx}{x} \Rightarrow \int_8^y \frac{ds}{s+2} = 6 \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \Big/_8^y \ln|s+2| = 6 \Big/_1^x \ln|t|$$

$$\ln|y+2| - \ln 10 = 6 \big(\ln|x| - \underbrace{\ln 1}_{=0} \big) = 6 \ln|x| = \ln(x^6)$$

VALITAAN $y > -2$, KOSKA $y(1) = 8 > -2$

$$\Rightarrow y + 2 = e^{\ln(x^6) + \ln 10} = e^{\ln(10x^6)} = 10x^6$$

$$\Rightarrow y = y(x) = \underline{\underline{10x^6 - 2}}$$

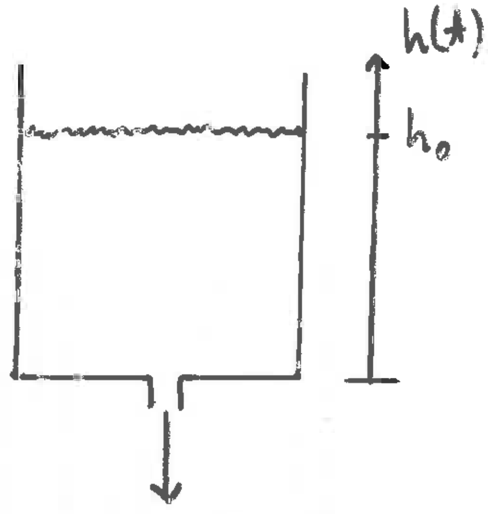
TAI: $\int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{6}{x} dx \Rightarrow \ln|y+2| + 6\ln|x| + C'$

$$\Rightarrow |y+2| = e^{6\ln|x| + C'} = e^{C'} e^{\ln x^6} = e^{C'} x^6$$

$$\Rightarrow y + 2 = \pm e^{C'} x^6 \equiv C x^6 \Rightarrow y(x) = Cx^6 - 2$$

$$y(1) = 8 \Rightarrow C = 10.$$

Esim. Vesi valuu säiliöstä;
veden korkeus $h = h(t)$,
$h(0) = h_0$
Jos $h(20\text{ min}) = \frac{1}{4} h_0$, niin
missä ajassa säiliö tyhjenee?



$v = \sqrt{2gh}$
(BERNOULLI / ENERGIA-PERIAATE)

OHEISLUKEMISTA

Ol. A_0 = säiliön poikkileikkauksen pinta-ala
A_1 = hanan — " —

$$\Rightarrow \quad A_0 \Delta h = -v \cdot A_1 \cdot \Delta t = -A_1 \sqrt{2gh}\, \Delta t$$

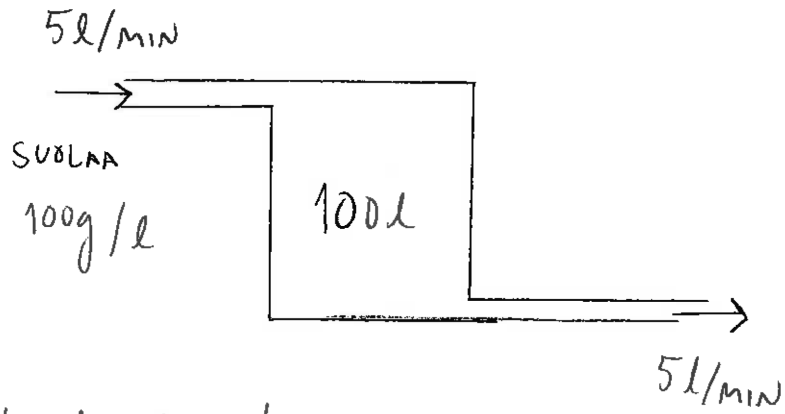
(tilavuuden muutokset aikavälillä Δt)

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \underbrace{-\frac{A_1}{A_0}\sqrt{2g}}_{\equiv -c}\, \sqrt{h(t)} = -c\sqrt{h}$$

Kun $\Delta t \to 0$, niin saadaan:

$$h' = -c\sqrt{h}, \quad h(0) = h_0$$

ESIM.



Vesisäiliöön lisätään suolaa:

$y(t)$ = suolan määrä hetkellä $t \geq 0$,

$y(0) = 0$, $[y(t)] = kg$

$$\Delta y \approx \frac{0{,}1\,kg}{1\,l} \cdot \frac{5\,l}{\text{MIN}} \cdot \Delta t - \frac{y(t)}{100\,l} \cdot \frac{5\,l}{\text{MIN}} \cdot \Delta t$$

lyhyellä aikavälillä Δt

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx 0{,}5 - 0{,}05\,y(t) \; ; \; \Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'$$

$$\Rightarrow y' + 0{,}05y = 0{,}5 \quad \Big| \cdot e^{0{,}05t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(y(t)\,e^{0{,}05t}\right) = 0{,}5\,e^{0{,}05t} \quad \Big| \int_0^t \ldots \, dr$$

$$\Rightarrow \Big/_0^t \, y(r)\,e^{0{,}05r} = 0{,}5 \int_0^t e^{0{,}05r}\,dr$$

$$\Rightarrow y(t)\,e^{0{,}05t} - y(0)\underbrace{e^{0}}_{=1} = 10\left(e^{0{,}05t} - 1\right) \quad \Big| \cdot e^{-0{,}05t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{10\left(1 - e^{-0{,}05t}\right)}} \; [kg], \; [t] = \text{MIN}$$