10.2 DY $y'' + py' + qy = 0$ I

Vakiokertoimisen lineaarisen ja homogeenisen DY:n $y'' + py' + qy = 0$ yleinen ratkaisu voidaan selvittää täydellisesti kaikilla vakioiden $p, q \in \mathbf{R}$ arvoilla.

Ratkaisun idea:

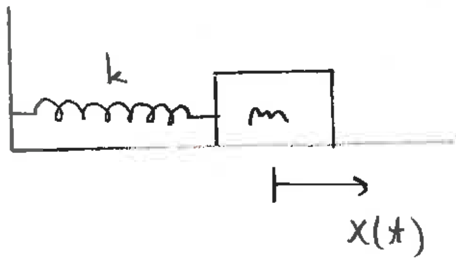
- Sijoitetaan yhtälöön yrite $y(x) = e^{\lambda x}$.
- Tulos johtaa ns. **karakteristiseen yhtälöön**

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

  jossa **karakteristisen polynomin** $P(\lambda)$ kertoimet ovat samat kuin DY:ssä.
  Huom: Tämän vuoksi karakteristisen yhtälön voi jatkossa kirjoittaa suoraan DY:n perusteella ilman välivaiheita!
- Ratkaistaan karakteristisen yhtälön juuret $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$.
- Perusjärjestelmä saadaan käsittelemällä erikseen kolme tapausta:

<u>Esim.</u> Harmoninen värähtely

t = AIKA



$x(t)$ = POIKKEAMA TASAPAINOSTA

$$F = ma = m \cdot x''(t)$$

$$\Leftrightarrow \; -k \cdot x(t) = m\, x''(t)$$

(TARKISTA VOIMAN SUUNTA:
$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow F < 0 \\ x < 0 \Rightarrow F > 0 \end{cases}$ Ok!)

$$\Leftrightarrow \; x'' + \omega^2 x = 0,$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

10.2 DY $y'' + py' + qy = 0$ II

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ ja } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \text{ ja } y_2(x) = xe^{\lambda x}.$$

Perustelu: Integroivan tekijän menetelmä toimii (vain!) tässä tapauksessa.

(iii) Jos juuret ovat muotoa $\lambda = a \pm bi$, $b \neq 0$, niin

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx) \text{ ja } y_2(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

Perustelu: Eulerin kaavan mukaan

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax}e^{\pm ibx} = e^{ax}(\cos(bx) \pm i\sin(bx)),$$

josta voidaan "arvata" sopivat reaaliset ratkaisut (tai perustelu kompleksikertoimisen lineaarikombinaation avulla).

Kaikissa tapauksissa yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tapaus 2 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kaksoisjuuri

$\Rightarrow$ saadaan yksi ratkaisu $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$

Onko muita?

Tutkitaan tarkemmin:

λ_1 kaksoisjuuri $\Rightarrow$ karakteristinen yhtälö muotoa $(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda_1 \lambda + \lambda_1^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ DY muotoa $y'' - 2\lambda_1 y' + \lambda_1^2 y = 0 \quad \Big| \cdot e^{-\lambda_1 x} > 0$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda_1 x} y''(x) - 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} y'(x) + \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 x} y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{-\lambda_1 x} y(x)\right) = 0$ (TARKISTA DERIVOIMALLA!) TOIMII VAIN TÄSSÄ TAPAUKSESSA!

$\Leftrightarrow e^{-\lambda_1 x} y(x) = C_1 + C_2 x \quad \Big| \cdot e^{\lambda_1 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ VAKIOITA

$\Leftrightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

Tulos • toinen ratkaisu on $y_2(x) = \underline{\underline{x e^{\lambda_1 x}}}$

PERUS-

• kaikki ratkaisut ovat muotoa

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Tapaus 3 $\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} \notin \mathbb{R}$,

t.s. $p^2 - 4q < 0$

Merkitään $\beta = \sqrt{4q-p^2}/2$, $\alpha = -p/2$, jolloin

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \alpha \pm i\beta, \quad i^2 = -1$$

i = imaginaariyksikkö

$\Rightarrow$ ratkaisut ovat

$$y(x) = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$$

Mitä tarkoittaa ???

YLEISTYS exp-FUNKTION OMINAISUUDELLE

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) \quad \text{Eulerin kaava}$$

$$= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Samoin: $e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) - i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Tässä esiintyvät reaaliset funktiot

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{ja} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

toteuttavat alkuperäisen DY:n!

(suoraviivainen mutta hankalahko sijoitus...)

YHTEENVETO: $y(x) = \underline{\underline{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}}$ kaikissa tapauksissa, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

*. Eulerin kaava

Differentiaaliyhtälöiden $y'' + py' + qy = 0$ kohdalla joudutaan vastaamaan kysymykseen:

Mitä tarkoittaa e^{ix}, kun $x \in \mathbb{R}$ ja i on <u>imaginaariyksikkö</u>, luku jolle $i^2 = i \cdot i = -1$.
(Kompleksilukuista lisää monisteessa, joka on oheislukemista).

Tutkitaan asiaa sarjakehitelmän avulla:

$$e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \qquad \text{Sijoitetaan } t = ix:$$

$$e^{ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m x^m}{m!}$$

$$\text{Tässä } i^m = \begin{cases} i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k, & \text{JOS } m = 2k = \text{PARILLINEN} \\ i^{2k+1} = i \cdot (i^2)^k = i \cdot (-1)^k, & \text{JOS } m = 2k+1 = \text{PARITON} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{ix} = \sum_{m \text{ PARILLINEN}} \frac{i^m x^m}{m!} + \sum_{m \text{ PARITON}} \frac{i^m x^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \underline{\cos x + i \sin x} \;!$$

Tämän perusteella näyttää järkevältä määritellä

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Tämä on <u>Eulerin kaava</u>

<u>Esim.</u> $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

ts. $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

MATEMATIIKAN 5 TÄRKEINTÄ LUKUA,
3 TÄRKEINTÄ LASKUTOIMITUSTA
SAMASSA KAAVASSA!

<u>Huom:</u>
$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

Lasketaan puolittain yhteen

$$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \Rightarrow \underline{\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

Vähennetään puolittain:

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \Rightarrow \underline{\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}$$

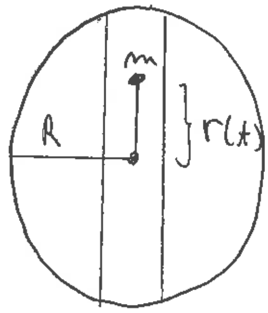
Värähtely-DY: $y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow$ KY $\lambda^2 + \omega^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm i\omega$

$$\Rightarrow y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

JAKSO $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

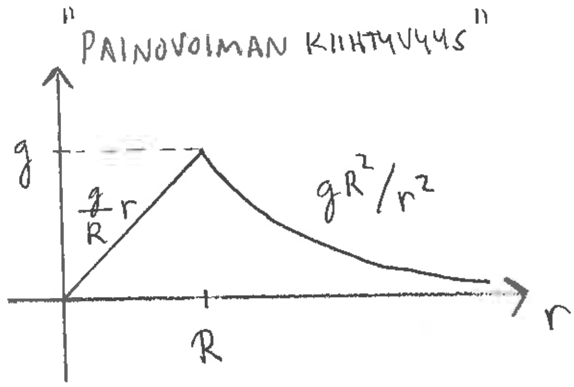
<u>Esim.</u> Porataan reikä Maan läpi ja pudotetaan kappale; etäisyys keskipisteestä



$$r = r(t)$$

$$F = ma = m\,r''(t)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{r}{R} mg = m\,r''(t)$$



$$\Leftrightarrow r'' + \frac{g}{R} r = 0$$

$$\omega = \sqrt{g/R}$$

$$\begin{cases} g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\ R \approx 6380\,\mathrm{km} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ jaksonaika

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx \underline{\underline{84\,\mathrm{min}}}$$

(AIKA, JOLLOIN KPL PALAA TAKAISIN)

↑ VRT TOTAL RECALL -ELOKUVAN UUSI VERSIO...

10.2 Eulerin lineaarinen DY I

Eulerin lineaarinen DY on muotoa

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Sen perusratkaisut saadaan muotoa $y(x) = x^r$ olevaa yritettä käyttämällä. Yritteen sijoittaminen johtaa 2. asteen yhtälöön

$$r^2 + (a-1)r + b = 0,$$

jonka juurten r_1, r_2 avulla perusjärjestelmä saadaan seuraavalla tavalla:

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin
$y_1(x) = |x|^{r_1}$ ja $y_2(x) = |x|^{r_2}$.

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $r = r_1 = r_2$, niin
$y_1(x) = |x|^r$ ja $y_2(x) = |x|^r \ln|x|$.

(iii) Jos juuret eivät ole reaalisia ja ovat muotoa $r = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, niin
$y_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)$ ja $y_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)$.

(iii) $x^{\alpha+i\beta} = e^{\ln x^{\alpha+i\beta}} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x}$

$= e^{\alpha \ln x} e^{i\beta \ln x} = e^{\ln x^\alpha} e^{i\beta \ln x}$

$= x^\alpha \left(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x) \right)$

(Tämä ei ole täsmällinen todistus, kun ei ole käsitelty exp / ln $\mathbb{C}$-luvuille, mutta idea lienee uskottava?)

10.3 Epähomogeeninen lineaarinen DY I

Lause 10.3

Epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3}$$

yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

kun y_1 ja y_2 ovat vastaavan homogeenisen yhtälön perusratkaisut ja y_0 on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Yksittäisratkaisuksi kelpaa siis mikä tahansa yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ toteuttava funktio $y_0(x)$.

VRT kertaluku = 1: $y' + p(x)y = r(x)$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = C e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int r(x) e^{P(x)}\,dx, \quad P'(x) = p(x)$$

HOMOGEENISEN $y' + p(x)y = 0$ YLEINEN RATKAISU

JOKIN YKSITTÄINEN RATKAISU

Lauseen perustelu: Oletetaan, että $y_1(x)$, $y_2(x)$ ja $y_0(x)$ saatu selville (tavalla tai toisella).

Olkoon $y(x)$ DY:n (**) ratkaisu.

Merkitään $Y(x) = y(x) - y_0(x)$, (APUFUNKTIO)

jolloin $Y'' + pY' + qY = (y'' + py' + qy) - (y_0'' + py_0' + qy_0)$

$$= r(x) - r(x) = 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow Y(x)$ toteuttaa vastaavan HY:n

$\Rightarrow Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ joillakin vakioilla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

ts. $y(x) - y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$\Leftrightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x)$

eli kaikki ratkaisut ovat tätä muotoa! $\square$

Aikaisemmin: $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ osataan ratkaista (vakiokertoimisessa tapauksessa)

Miten saadaan $y_0(x)$?

Vastaus: Kuten esimerkissä; kokeillaan sopivaa yritettä $y_0(x)$, joka on (yleensä) muotoa "$r(x)$" yleisillä kertoimilla.

Esim. $y'' + y = x^2$, $y(0) = y'(0) = 0$

HY: $y'' + y = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Yksittäisratkaisu:

Yrite $y_0(x) = Ax^2$; sij. DY:hyn $\Rightarrow 2A + Ax^2 = x^2 \ \forall x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow$ RR, ei toimi

Uusi yrite $y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$ (yleinen 2. asteen polynomi)

$\Rightarrow y_0'(x) = 2Ax + B$, $y_0''(x) = 2A$

Sij. $\Rightarrow 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 \ \forall x$

$\Leftrightarrow Ax^2 + Bx + (2A + C) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = x^2 - 2$

Yleinen ratkaisu: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$

$\Rightarrow y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x$

$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 - 2 \\ 0 = y'(0) = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ Siis: $\underline{\underline{y(x) = 2\cos x + x^2 - 2}}$

<u>Esim.</u> $y'' - 4y = \cos 3x$, yleinen ratkaisu?

HY: $y'' - 4y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

$y_0(x) = A\cos(3x)$?

sij. $\Rightarrow (-9A - 4A)\cos(3x) = \cos(3x)$

$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{13}$

<u>Siis</u>: Yl. ratk. on $y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{13}\cos(3x)}}$.

<u>Esim.</u> $y'' - 4y' = \cos(3x)$, yleinen ratkaisu?

"EI HAITTAA MITÄÄN"

HY: $y'' - 4y' = 0$, KY $\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4$

$\Rightarrow y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1,\quad y_2(x) = e^{4x}$

$y_0(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$ (KOKEILU PELKÄLLÄ $A\cos(3x)$:LLÄ $\Rightarrow$ EI TOIMI!)

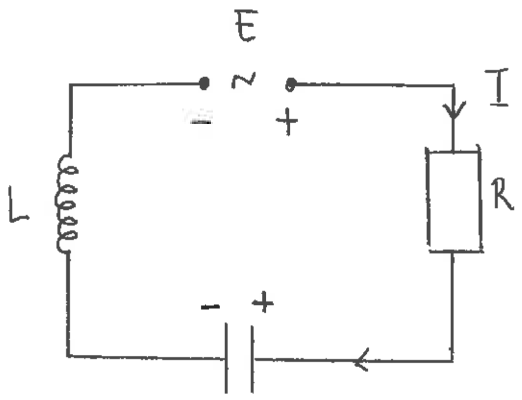
SIJ. $-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) - 4(-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)) = \cos(3x)$

$\Leftrightarrow (-9A - 12B)\cos(3x) + (-9B + 12A)\sin(3x) = \cos(3x)$

OK, jos $\begin{cases} 9A + 12B = -1 \\ 12A - 9B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/25 \\ B = -4/75 \end{cases}$

Siis: $y(x) = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{25}\cos(3x) - \frac{4}{75}\sin(3x)}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Esim. RLC-piiri



C, VARAUS $Q(t)$

Kirchhoff:

Lähdejännite = jännitehäviöiden summa

$$E(t) = \underbrace{R \cdot I(t)}_{\text{OHM}} + \underbrace{\frac{1}{C} Q(t)}_{\text{DEF.}} + \underbrace{L I'(t)}_{\text{LENZ}}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx I(t)$$

$$\Rightarrow I(t) = Q'(t)$$

Derivoidaan puolittain

$$\Rightarrow \underline{L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = E'(t)}$$

(Keinotekoiset) lukuarvot, merk. $y(t) = I(t)$ $\Rightarrow$

$$y'' + 10y' + 61y = 370 \sin t \quad \leftarrow \text{VAIHTOVIRTALÄHDE}$$

HY: $y'' + 10y' + 61y = 0$ $\Rightarrow$ KY $\lambda^2 + 10\lambda + 61 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = -5 \pm 6i$

1 yrite: $y_0(t) = A \cos t + B \sin t$ ($B \sin t$ ei yksin riitä!)

Sij. $\Rightarrow (-A\cos t - B \sin t) + 10(-A \sin t + B \cos t) + 61(A \cos t + B \sin t) = 370 \sin t$

$$\Leftrightarrow (60A + 10B)\cos t + (60B - 10A)\sin t = 370 \sin t$$

OK, jos $\begin{cases} 60A + 10B = 0 \\ -10A + 60B = 370 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{e^{-5t}\left(C_1 \cos(6t) + C_2 \sin(6t)\right) - \cos t + 6 \sin t}}$$

$$\approx 6 \sin t - \cos t \quad \text{hyvin nopeasti}$$

Projektitehtävä (4 p)

Tavoite: Loppuviikon harjoitukseen liittyy viikottain yksi laajempi tehtävä, jossa johdatellaan harmonisen värähtelyn differentiaaliyhtälöön ja sen käsittelyyn eri tavoilla. Tämä **projektitehtävä** palautetaan samaan aikaan muiden palautettavien tehtävien kanssa.

Projektitehtävän ratkaisu on tarkoitus kirjoittaa (lyhyenä) raporttina, jossa kuvaillaan myös sanallisesti se, mitä tehdään ja miksi. Myös ilmiön ja tulosten pohdiskelu on suotavaa.

4 Pakotettu värähtely ja resonanssi

Aikaisemmissa värähtelyissä liike syntyi joko jousivoiman tai painovoiman vaikutuksesta. Monissa käytännön tilanteissa värähtelyyn vaikuttaa lisäksi ulkoisia ajasta riippuvia voimia.

a) Yksi tunnetuimmista ulkoisen voiman (tuuli) aiheuttamista värähtelyistä on Tacoma Narrows -sillan romahdus v. 1940 USA:ssa.

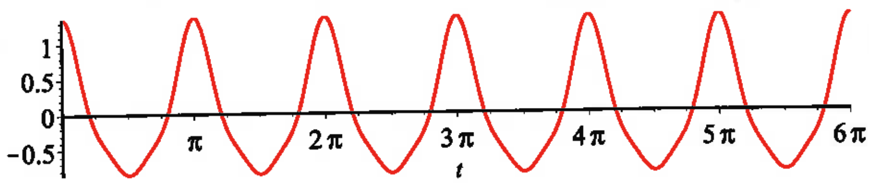
- Katso video sivulta `youtu.be/j-zczJXSxnw`

Tämä on kuitenkin liian vaikea mallinnettavaksi, joten käsittelemme hieman alkeellisempaa tapausta.

b) Lisätään harmonisen värähtelyn differentiaaliyhtälöön $y'' + \omega^2 y = 0$ kolmea eri taajuutta sisältävä voima $f(t)$, joka johtaa *epähomogeeniseen* differentiaaliyhtälöön

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t) = \cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{1}{9}\cos(6t). \tag{1}$$

- Mikä on voiman $f(t)$ jaksonaika ja miksi? Voit tarkistaa vastauksesi myös alla olevasta kuvaajasta.



c) Epähomogeenisia differentiaaliyhtälöitä käsitellään vasta viimeisellä luennolla, mutta yksi ratkaisu saadaan selville kokeilemalla:

- Sijoita DY:n (1) vasemmalle puolelle lauseke

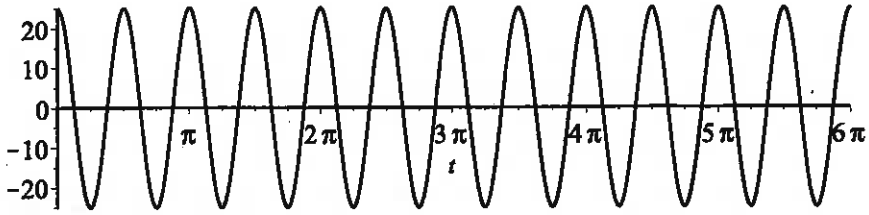
  $$y(t) = A_1\cos(2t) + A_2\cos(4t) + A_3\cos(6t). \tag{2}$$

  Yhdistä samanlaiset cos-termit ja vertaa niitä voiman $f(t)$ vastaaviin cos-termeihin. Päättele kerrointen A_1, A_2 ja A_3 lausekkeet tai ainakin likiarvot **tapauksessa** $\omega^2 = 16{,}01$ eli $\omega \approx 4{,}001$.

- Yksi kerroin A_k on selvästi muita suurempi, joten sitä vastaava osa ratkaisua (2) määrää ratkaisun käyttäytymisen. Mikä on tämä kerroin?

Käännä!

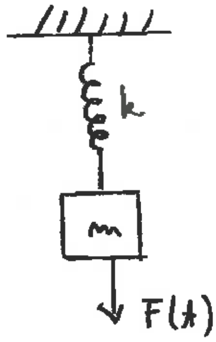
- Koko ratkaisun (2) kuvaaja näillä kertoimilla näyttää seuraavalta:



Mikä on kuvaajasta katsottuna ratkaisun jaksonaika? Onko se sama kuin alkuperäisen voiman $f(t)$ jaksonaika?

- Yksi voiman $f(t)$ kolmesta termistä on luonteeltaan hyvin lähellä homogeenisen DY:n ratkaisua $\cos(\omega t) \approx \cos(4{,}001t)$, joka liittyy systeemin värähtelyyn ilman ulkopuolista voimaa. Yritä selittää tämän havainnon avulla yllä saatu tulos, jossa ratkaisu värähtelee (käytännössä) eri taajuudella kuin ulkopuolisen voiman perusteella voisi kuvitella. Ilmiön nimi on otsikossa mainittu *resonanssi.*

PROJEKTI 4 KESKEISET KOHDAT



a) KATSELU

b) $f(t) = \cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{1}{9}\cos(6t)$

$\cos(\omega t)$:N JAKSO $= \frac{2\pi}{\omega}$

$\Rightarrow$ ERI TERMIEN JAKSOT $\frac{2\pi}{2} = \pi$, $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$T = \pi$ ON KAIKKIEN MONIKERTA $\Rightarrow$ $\underline{\underline{T = \pi}}$ ON (PERUS) JAKSO, KUTEN KUVASSAKIN

c) $y(t) = A_1\cos(2t) + A_2\cos(4t) + A_3\cos(6t)$

$\Rightarrow y''(t) = -4A_1\cos(2t) - 16A_2\cos(4t) - 36A_3\cos(6t)$

SIJ. DY:ÖÖN $y'' + \omega^2 y = f(t)$

$\Rightarrow (-4A_1 + \omega^2 A_1)\cos(2t) + (-16A_2 + \omega^2 A_2)\cos(4t) + (-36A_3 + \omega^2 A_3)\cos(6t)$

$= \cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{1}{9}\cos(6t) \quad \forall t$

OK, (VAIN) JOS $\begin{cases} (-4+\omega^2)A_1 = 1 \\ (-16+\omega^2)A_2 = \frac{1}{4} \\ (-36+\omega^2)A_3 = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{12{,}01} \approx 0{,}08326 \\ A_2 = \frac{1}{4 \cdot 0{,}01} = 25 \\ A_3 = \frac{-1}{9 \cdot 19{,}99} \approx 0{,}005558 \end{array}$

$\omega^2 = 16{,}01$

- $\underline{A_2 = 25}$ NOIN 300-KERTAINEN VRT. A_1, 4500-KERTAINEN VRT. A_3
- RATKAISUN JAKSO KUVAAJASTA $= \underline{\underline{\pi/2}}$
- ILMAN ULKOISTA VOIMAA SYSTEEMI VÄRÄHTELEE (OMINAIS) TAAJUUDELLA $\omega \approx 4{,}001$

JOS VOIMASSA ON TÄTÄ LÄHELLÄ OLEVA KOMPONENTTI, NIIN SEN VAIKUTUS LIIKKEESEEN ON DOMINOIVA $\rightarrow$ <u>RESONANSSI</u>

HUOM: JOS $f(t)$ SIS. TÄSMÄLLEEN $\cos(\omega t)$-TERMIN, NIIN

RATKAISUUN TULEE $A\underline{t}\cos(\omega t) + B\underline{t}\sin(\omega t)$ -TERMEJÄ