MS-A0101 tentti 23.10.2019: ratkaisut

Tehtävä 1

Katso luennot.

Tehtävä 2

> $f := x \rightarrow 2 \cdot x + \sin(x)$

$$f := x \mapsto 2\,x + \sin(x) \tag{2.1}$$

> $f'(x)$

$$2 + \cos(x) \tag{2.2}$$

Selvästi $f'(x) \geq 2 - 1 = 1 > 0$, joten f on aidosti kasvava.

> $'f(\mathrm{Pi})' = f(\mathrm{Pi})$

$$f(\pi) = 2\,\pi \tag{2.3}$$

Näin ollen $f^{-1}(2\,\pi) = \pi$.

Merkitään $g = f^{-1}$.

> *restart*

> $\mathit{diff}(f(g(x)) = x, x)$

$$\mathrm{D}(f)(g(x)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right) = 1 \tag{2.4}$$

> $\mathit{solve}\left(\%, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right)$

$$\frac{1}{\mathrm{D}(f)(g(x))} \tag{2.5}$$

> $\mathit{diff}(\%, x)$

$$-\frac{\mathrm{D}^{(2)}(f)(g(x)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right)}{\mathrm{D}(f)(g(x))^2} \tag{2.6}$$

> $\mathit{subs}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \frac{1}{\mathrm{D}(f)(g(x))}, \%\right)$

$$-\frac{\mathrm{D}^{(2)}(f)(g(x))}{\mathrm{D}(f)(g(x))^3} \tag{2.7}$$

Tässä kopioitiin hiirellä lausekkeita aikaisemmista käskyistä. Vähän hankalaa, mutta toimii!
Vastataan vielä viimeiseen kysymykseen.

> $f := x \rightarrow 2 \cdot x + \sin(x) :$

> $x := \mathrm{Pi} :$

> $g(\mathrm{Pi}) := 2 \cdot \mathrm{Pi} :$

> **'(2.7)'= (2.7)**

$$-\frac{\mathrm{D}^{(2)}(f)(g(x))}{\mathrm{D}(f)(g(x))^3} = 0 \tag{2.8}$$

Tehtävä 3

> $restart:$

> $assume(n, posint)$

> $S := n \rightarrow int(x^n \cdot \sin(x), x = 0..\mathrm{Pi})$

$$S := n \mapsto \int_0^{\pi} x^n \sin(x)\, \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

> $C := n \rightarrow int(x^n \cdot \cos(x), x = 0..\mathrm{Pi})$

$$C := n \mapsto \int_0^{\pi} x^n \cos(x)\, \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

> $simplify(S(n) - \mathrm{Pi}^n - n \cdot C(n-1))$

$$0 \tag{3.3}$$

> $simplify(C(n) + n \cdot S(n-1))$

$$0 \tag{3.4}$$

> $S(0)$

$$2 \tag{3.5}$$

> $S(4)$

$$\pi^4 - 12\pi^2 + 48 \tag{3.6}$$

Tehtävä 4

> $series(\exp(t), t, 3)$

$$1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{O}(t^3) \tag{4.1}$$

> $convert(\%, polynom)$

$$1 + t + \frac{1}{2}t^2 \tag{4.2}$$

> $subs(t = \mathrm{sqrt}(x), \%)$

$$1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} \tag{4.3}$$

> $int(\%, x = 0..4)$

$$\frac{40}{3} \tag{4.4}$$

> $int(\exp(\mathrm{sqrt}(x)), x = 0..4)$

$$2 + 2\,\mathrm{e}^2 \tag{4.5}$$

Tehtävä 5

> $restart$

Tällä kurssilla kyseessä olevan DY:n ratkaisun voi kirjoittaa suoraan:

> $y := t \to C \cdot \exp(k \cdot t)$

$$y := t \mapsto C\, e^{k t} \tag{5.1}$$

> $C := solve(y(0) = 1000, C)$

$$C := 1000 \tag{5.2}$$

> $k := solve\left(y(2) = 10^7, k\right)$

$$k := 2 \ln(10) \tag{5.3}$$

> $restart$

> $dsolve\left(\left\{y'(x) = 3 \cdot y(x)^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0\right\}\right)$

$$y(x) = 0 \tag{5.4}$$

Maple antaa vain erikoisratkaisun. Kokeillaan yleisen ratkaisun kautta:

> $dsolve\left(y'(x) = 3 \cdot y(x)^{\frac{2}{3}}\right)$

$$y(x)^{1/3} - x - \_C1 = 0 \tag{5.5}$$

Tämä on yleisen ratkaisun implisiittinen muoto.

> $solve(\%, y(x))$

$$\_C1^3 + 3\,\_C1^2\, x + 3\,\_C1\, x^2 + x^3 \tag{5.6}$$

> $factor(\%)$

$$(x + \_C1)^3 \tag{5.7}$$

Tämä on yleisen ratkaisun lauseke. Alkuehdosta $y(0) = 0$ saadaan $\_C1 = 0$, joten separoimalla saatu ratkaisu on $y(x) = x^3$.

Tehtävä 6

> $dsolve(y''(x) - 5 \cdot y'(x) - 6 \cdot y(x) = 0)$

$$y(x) = \_C2\, e^{-x} + \_C3\, e^{6x} \tag{6.1}$$

> $subs(y(x) = A \cdot x + B, y''(x) - 5 \cdot y'(x) - 6 \cdot y(x) = 36 \cdot x + 36)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A x + B) - 5 \frac{\partial}{\partial x}(A x + B) - 6 A x - 6 B = 36 x + 36 \tag{6.2}$$

> $simplify(\%)$

$$(-6 x - 5) A - 6 B = 36 x + 36 \tag{6.3}$$

Tästä saadaan yhtälöpari $-6 A = 36$, $-5 A - 6 B = 36$, joten $A = -6$ ja $B = -1$. Yleiseksi ratkaisuksi saadaan

> $dsolve(y''(x) - 5 \cdot y'(x) - 6 \cdot y(x) = 36 \cdot x + 36)$

$$y(x) = e^{-x}\, \_C3 + e^{6x}\, \_C2 - 6 x - 1 \tag{6.4}$$

ja alkuehdot toteuttaa ratkaisu

> $dsolve(\{y''(x) - 5 \cdot y'(x) - 6 \cdot y(x) = 36 \cdot x + 36, y(0) = 0, y'(0) = 0\})$

$$y(x) = -1 + e^{6x} - 6 x \tag{6.5}$$