Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Moring
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)

Kurssitentti ja yleinen tentti 25.10.2018 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. a) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$
suppenee?
b) Oletetaan, että sarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
termeille on voimassa $\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1/2$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ Perustele kurssilla esitettyjä tuloksia käyttämällä, että sarja suppenee.

2. a) Laske raja-arvo
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x)}{1 - \cos x}$$
esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla.
b) Määritä toisen asteen Maclaurin-polynomi $P_2(x)$ funktiolle $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi pisteen $x_0 = 0$ suhteen.

3. Määritellään funktio $f\colon [-1, \infty[\to [-1/e, \infty[$ asettamalla $f(x) = xe^x$, kun $x \geq -1$.
a) Osoita että funktio f on aidosti kasvava.
b) Merkitään $W(x) = f^{-1}(x)$. Laske derivaatta $W'(0)$.
c) Laske toinen derivaatta $W''(0)$ derivoimalla kaksi kertaa yhtälö
$$W(x)e^{W(x)} = x,$$
sijoittamalla $x = 0$ ja ratkaisemalla kysytty lauseke.
Varoitus + lisätieto: Käänteisfunktiota $W(x)$ ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla. Sen nimi on Lambertin W-funktio.

Käännä!

4. a) Olkoon

$$E_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx,$$

kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ Johda osittaisintegroimalla lausekkeelle E_n palautuskaava ja päättele sen avulla integraalin E_5 arvo.
b) Laske integraali

$$\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$$

joko sijoittamalla $t = x^2$ tai käyttämällä osamurtohajotelmaan liittyviä menetelmiä.

5. a) Eräs laite poistaa merivedestä suolaa niin, että säiliön suolapitoisuus $p = p(t)$ (yksikkönä %) toteuttaa differentiaaliyhtälön $p' = -kp$, kun $k > 0$ on vakio ja ajan t yksikkönä on minuutti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun tiedetään, että $p(0) = 3$ ja $p(10) = 2$.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2x(1 + y^2)$ alkuehdolla $y(0) = 1$.

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' - 10y = 0$ ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 7$, $y'(0) = 0$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$\begin{aligned} D\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia II-periodin tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**